

Тема 3.

Тригонометричні рівняння й нерівності

Урок 9. Урок–практикум. Розв’язування рівнянь виду $\operatorname{tg} x = a$

РОБОЧИЙ АРКУШ

(моє ім’я)

I. Очікувані результати навчальних досягнень

На уроці ви:

- 1) удосконалили вміння обчислювати значення арктангенсів чисел;
- 2) навчилися розв’язувати рівняння $\operatorname{tg} x = a$;
- 3) навчилися розв’язувати рівняння $\operatorname{tg} x = a$ на заданому проміжку;
- 4) навчилися використовувати набуті знання для розв’язування практичних задач.

II. Повторення

1. Укажіть головний період функції $y = \operatorname{tg} 2x$.
2. Спростіть вираз $\operatorname{tg}\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)$, за формулою тангенса суми?
3. Чи існує число α , для якого $\sin \alpha = \frac{1}{4}$ і $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2}$?
4. Обчисліть $\operatorname{tg} 2\alpha$, якщо $\operatorname{tg} \alpha = 0,4$.
5. Спростіть, за формулою зведення $\frac{\operatorname{tg}(\pi - \alpha)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)}$.

III. Обчислення значень арктангенсів чисел

Нагадаємо, що арктангенсом числа a називають таке число α з проміжку $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, тангенс якого дорівнює a .

Основні властивості арктангенса

1. Для будь-якого числа a існує єдине значення арктангенса.
2. Для будь-якого числа a виконується рівність $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} a) = a$.
3. $\operatorname{arctg}(-a) = -\operatorname{arctg} a$.
4. $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} \alpha) = \alpha$, якщо $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

Примітка. Арктангенс — це кут, який належить проміжку $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, тому в деяких завданнях, у яких потрібно обчислити тригонометричну функцію від арктангенса, то зручно позначити його якою небудь грецькою літерою α, β і т. ін.

Приклад 1. Обчисліть $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} 2 + \operatorname{arctg} 3)$.

Розв'язання. Нехай $\operatorname{arctg} 2 = \alpha$, $\operatorname{arctg} 3 = \beta$, де $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$, $-\frac{\pi}{2} < \beta < \frac{\pi}{2}$.

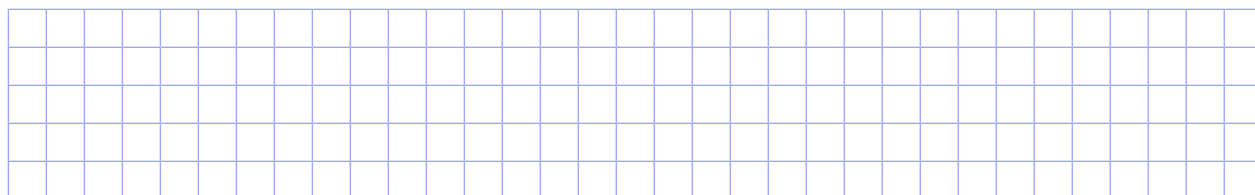
Тоді $\operatorname{tg} \alpha = 2$, $\operatorname{tg} \beta = 3$.

За формулою, $\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}$, отримаємо

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} 2 + \operatorname{arctg} 3) = \frac{2 + 3}{1 - 2 \cdot 3} = \frac{5}{-5} = -1.$$

Відповідь. -1 .

Приклад 2. Обчисліть $\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg} \frac{3\pi}{4}\right)$.



IV. Розв'язування рівнянь $\operatorname{tg} x = a$

Розв'язками рівняння $\operatorname{tg} x = a$ є множина $x = \operatorname{arctg} a + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Приклад 3. Розв'яжіть рівняння $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \sqrt{3}$.

Розв'язання. Оскільки функція $f(x) = \operatorname{tg} x$ — непарна, то:

$$\operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{3}, \quad x - \frac{\pi}{4} = \operatorname{arctg}(-\sqrt{3}) + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z},$$

$$x - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{3} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad x = -\frac{\pi}{12} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Відповідь. $-\frac{\pi}{12} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$.

VII. Тренувальні вправи. Три рівні складності: А, В, С

Рівень А

1. Обчисліть:

- | | |
|--|---|
| 1) $\cos(\operatorname{arctg} 1 + \operatorname{arctg} 1)$; | 2) $\operatorname{tg}\left(\arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} + \operatorname{arctg} \sqrt{3}\right)$; |
| 3) $\operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{3}} - \operatorname{arctg} \sqrt{3}$; | 4) $\operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \operatorname{arctg} 1$. |

2. Чи може $\operatorname{arctg} x$ дорівнювати:

- | | | |
|-----------------------|-----------------------|----------------------|
| 1) 0; | 2) $\frac{\pi}{2}$; | 3) $\sqrt{3}$; |
| 4) $\frac{2\pi}{3}$; | 5) $-\frac{\pi}{4}$; | 6) $\frac{\pi}{3}$? |

3. Розв'яжіть рівняння:

- | | | | |
|---------------------------------|--|---------------------------------|---|
| 1) $\operatorname{tg} 5x = 1$; | 2) $1 + \operatorname{tg} \frac{x}{3} = 0$; | 3) $\operatorname{tg} 3x = 0$; | 4) $\sqrt{3} - \operatorname{tg} \frac{x}{6} = 0$; |
|---------------------------------|--|---------------------------------|---|

4. Розв'яжіть рівняння:

- | | | | |
|---|-----------------------------------|--------------------------------|----------------------------------|
| 1) $\operatorname{tg} x = -\frac{1}{3}$; | 2) $\operatorname{tg} x = 0,25$; | 3) $\operatorname{tg} x = 3$; | 4) $\operatorname{tg} x = -50$; |
|---|-----------------------------------|--------------------------------|----------------------------------|

5. Розв'яжіть рівняння:

- | | | | |
|---|--|-----------------------------------|----------------------------------|
| 1) $\operatorname{tg}\left(2x - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$; | 2) $\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} - 1\right) = 0,2$; | 3) $\operatorname{tg} 3x = 1,1$; | 4) $\operatorname{tg} 6x = -9$; |
|---|--|-----------------------------------|----------------------------------|

6. Скільки коренів рівняння $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ належать проміжку $\left[-\frac{\pi}{2}; 2\pi\right]$?

Рівень В

1. Обчисліть:

- | | | |
|--|---|---|
| 1) $\operatorname{ctg}(\operatorname{arctg} \sqrt{3})$; | 2) $\sin\left(\operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$; | 3) $\operatorname{ctg}(\operatorname{arctg} 1)$; |
| 4) $\cos(\operatorname{arctg} 1)$; | 5) $\sin(\operatorname{arctg}(-\sqrt{3}))$; | 6) $\cos(\operatorname{arctg}(-\sqrt{3}))$. |

2. Розв'яжіть рівняння:

- | | |
|---|---|
| 1) $\operatorname{tg}\left(-\frac{x}{3} + \frac{\pi}{6}\right) = 5$; | 2) $3 \operatorname{tg}(2x - 7) = -3$. |
|---|---|

3. Розв'яжіть рівняння:

- | | | | |
|--|---|---|---|
| 1) $\operatorname{tg} \frac{3\pi}{2x} = 0$; | 2) $\operatorname{tg} \frac{2\pi}{x} = 1$; | 3) $\operatorname{tg} \frac{\pi}{4x} = 1$; | 4) $\operatorname{tg} \frac{3}{x} = -1$. |
|--|---|---|---|

4. Знайдіть усі корені рівняння, що належать даному проміжку:

- | | |
|---|--|
| 1) $\operatorname{tg} 4x = 3, x \in \left[-\pi; \frac{\pi}{2}\right]$; | 2) $\operatorname{tg} 3x = -2, x \in [-\pi; 2\pi]$. |
|---|--|

5. Розв'яжіть рівняння:

1) $(\operatorname{tg} x + 1)(\operatorname{tg} x - \sqrt{3}) = 0$;

2) $(\operatorname{tg} x + 5)(1 - 2 \cos x) = 0$;

3) $(\sqrt{3} \operatorname{tg} x - 1)(\operatorname{tg} x + \sqrt{3}) = 0$;

4) $(\operatorname{tg} x - 3) \left(\sin \frac{x}{2} + 1 \right) = 0$;

6. Розв'яжіть рівняння:

1) $\left(2 \operatorname{tg} \left(x - \frac{\pi}{6} \right) + 1 \right) (3 \operatorname{tg} x - 1) = 0$;

2) $\left(1 - \sqrt{3} \operatorname{tg} \frac{x}{3} \right) (1 - \sqrt{3} \operatorname{tg} x) = 0$.

7. Обчисліть:

1) $\operatorname{arctg} \left(\operatorname{tg} \frac{11\pi}{7} \right)$; 2) $\operatorname{arctg} \left(\operatorname{tg} \frac{23\pi}{9} \right)$; 3) $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} 13)$; 4) $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} 7)$.

8. Знайдіть усі корені рівняння, що належать даному проміжку:

1) $\operatorname{tg}^2 x = 3$, $x \in [-\pi; \pi]$;

2) $\operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{3}$, $(0; 2\pi)$.

9. Обчисліть:

1) $\operatorname{arctg} \left(\operatorname{tg} \frac{8}{7} \pi \right)$;

2) $\operatorname{arctg} \left(\operatorname{tg} \frac{9}{5} \pi \right)$.

10. Доведіть, якщо $ab \neq 1$, то $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} a + \operatorname{arctg} b) = \frac{ab}{1 - ab}$.

11. Доведіть, якщо $-1 < a < 1$, то $\arcsin a = \operatorname{arctg} \frac{a}{\sqrt{1 - a^2}}$.

12. При яких значеннях параметра a має розв'язки рівняння $\frac{\sin x - a}{3 \operatorname{tg}^2 x - 1} = 0$?

Рівень С

1. Розв'яжіть рівняння:

1) $\operatorname{tg}(2x) \cdot \sqrt{16 - x^2} = 0$;

2) $\operatorname{tg} \left(3x - \frac{\pi}{4} \right) \cdot \sqrt{6 - |x|} = 0$.

2. Обчисліть:

1) $\operatorname{tg} \left(\operatorname{arctg} \frac{1}{3} + \operatorname{arctg} \frac{2}{5} \right)$;

2) $\operatorname{tg} \left(\operatorname{arctg} 2 - \operatorname{arctg} \frac{3}{5} \right)$;

3) $\operatorname{tg} \left(\frac{1}{2} \arccos \left(-\frac{4}{7} \right) \right)$;

4) $\operatorname{tg} \left(2 \arcsin \frac{3}{5} \right)$.

3. При яких значеннях параметра a рівняння $(x + a)(\operatorname{ctg} x - 1) = 0$ на проміжку $\left[-\frac{\pi}{2}; 0 \right)$ має єдиний корінь?

4. Розв'яжіть рівняння:

1) $8 \operatorname{tg}^3 x + 1 = 0$;

2) $27 \operatorname{tg}^3 x - 8 = 0$;

3) $9 \operatorname{tg}^4 x = 1$;

4) $16 \operatorname{tg}^4 2x = 1$.

5. При яких додатних значеннях параметра a проміжок $\left[-a; \frac{\pi}{2} \right)$ містить не менше

трьох коренів рівняння $\operatorname{tg} x = \frac{\sqrt{3}}{3}$?

6. Доведіть рівність:

1) $\arctg 2 + \arctg 3 = \frac{3\pi}{4}$;

2) $\arctg \frac{1}{2} + \arctg \frac{1}{3} = \frac{\pi}{4}$.

7. **Творче завдання.** Запрограмуйте алгоритм, який визначає кількість коренів рівняння $\operatorname{tg} x = a$ на заданому проміжку.

Рефлексія. «Плюс-Мінус-Цікавинка»

(+) що було зрозумілим:

(-) що залишилося незрозумілим:

(?) що здивувало або зацікавило:

Можливі теми проєктів

1. Використання рівнянь $\operatorname{tg} x = a$ в авіації для розрахунку траєкторії зльоту літаків.
2. Визначення часу заходу Сонця, якщо відома висота спостерігача над рівнем моря.
3. Розрахунок кута підйому дорожнього покриття у гірських місцевостях.
4. Використання рівняння $\operatorname{tg} x = a$ у віртуальних симуляторах та відеоіграх.
5. Розрахунок кута нахилу сонячних панелей за допомогою рівняння $\operatorname{tg} x = a$.







