

Тема 3.

Тригонометричні рівняння й нерівності

Урок 9. Урок–практикум. Розв’язування рівнянь виду $\operatorname{tg} x = a$

Тип уроку: урок формування умінь і навичок.

План уроку

1. Обчислення значень арктангенсів чисел.
2. Розв’язування рівнянь $\operatorname{tg} x = a$.
3. Розв’язування рівнянь $\operatorname{tg} x = a$ на заданому проміжку.

Очікувані результати навчальних досягнень

Учень/учениця:

впорядковує та перетворює інформацію математичного змісту в специфічних проблемних ситуаціях, зокрема із застосуванням інформаційних технологій [12 МАО 2.1.3–1 П];

аналізує спільні та відмінні риси різних моделей і шляхів розв’язання специфічної проблемної ситуації [12 МАО 3.2.1–1 П];

робить висновки щодо застосування математичних понять і фактів [12 МАО 4.1.2–1 П].

Дружні поради вчителю/вчительці до уроку

- 1) Сформулюйте учням/ученицям мотиваційні запитання щодо матеріалу уроку.
- 2) Запропонуйте учням/ученицям, на ваш вибір, завдання на повторення вивченого.
- 3) Сформулюйте практичну задачу (без розв’язання). Розв’язання пропонуємо у вигляді групової роботи наприкінці уроку.
- 4) До теоретичних тверджень наведено ілюстративні приклади. Обирайте ілюстративні приклади на ваш розсуд.
- 5) Обирайте кількість та зміст матеріалу на власний розсуд.
- 6) Заплануйте розв’язання практичної задачі. Об’єднайте учнів/учениць у кілька груп. Під час розв’язання задачі групами важливо формувати комунікаційні навички, інтегрувати здобуті знання у розв’язання практичних задач.

7) Запропонуйте учням/ученицям самотужки або в групах розв'язувати тренувальні завдання за трьома рівнями складності, на вибір учня/учениці. Формуйте навички розв'язання прикладів і задач та навчайте учнів/учениць самостійної роботи над завданнями.

8) Мотивуйте учнів/учениць до проектної діяльності. Запропонуйте учням/ученицям обрати теми для індивідуальних (групових) проєктів.

9) Можливі теми для створення проєктів запропоновані. Також темами проєктів можуть бути практичні завдання за рівнями складності В або С. Якщо учень/учениця розв'язали завдання рівня А, то для проєкту вони можуть обрати рівень В або рівень С.

I. Організаційна частина (2 хв)

Мотиваційні запитання

1) Для чого розв'язувати рівняння $\operatorname{tg} x = a$?

2) Чи можна використати рівняння $\operatorname{tg} x = a$ для визначення висоти об'єкта чи відстані до нього?

3) Чи може рівняння $\operatorname{tg} x = a$ бути корисним при побудові лазерних систем наведення?

4) Чи можна за тангенсом визначити безпечний кут нахилу сходів?

5) Чи може рівняння $\operatorname{tg} x = a$ допомогти у розрахунку траєкторії польоту м'яча?

II. Повторення (3–4 хв)

1. Укажіть головний період функції $y = \operatorname{tg} 2x$.

Відповідь. $\frac{\pi}{2}$.

2. Спростіть вираз $\operatorname{tg}\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)$, за формулою тангенса суми?

Відповідь. $\frac{1 + \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg} \alpha}$.

3. Чи існує число α , для якого $\sin \alpha = \frac{1}{4}$ і $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2}$?

Відповідь. Ні.

4. Обчисліть $\operatorname{tg} 2\alpha$, якщо $\operatorname{tg} \alpha = 0,4$.

Відповідь. $\frac{20}{21}$.

5. Спростіть, за формулою зведення $\frac{\operatorname{tg}(\pi - \alpha)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)}$.

Відповідь. $\frac{1}{\cos \alpha}$.

Як я вирішую певну проблему?

Задача. Інженер, розробляючи лазерну систему наведення, встановив лазер на відстані 2 м від стіни так, що лазер випромінює промені перпендикулярно до стіни. Лазер планується обертати в горизонтальній площині, проти руху годинникової стрілки, і досліджувати швидкість руху точки променя по стіні. Спеціальні датчики встановлені на стіні, в площині обертання лазера, на відстанях 1,5 м в обидва боки від точки, в яких лазер випромінював промінь на початку експерименту. Визначте загальну формулу для знаходження всіх кутів повороту лазера (у радіанах), при яких кінцева точка променя проходить через датчики.

Задача 2. Олімпіадна задача. Визначте кількість коренів рівняння $x^2 + \operatorname{tg}^2 x = 100$.

III. Обчислення значень арктангенсів чисел

Нагадаємо, що арктангенсом числа a називають таке число α з проміжку $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, тангенс якого дорівнює a .

Основні властивості арктангенса

1. Для будь-якого числа a існує єдине значення арктангенса.
2. Для будь-якого числа a виконується рівність $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} a) = a$.
3. $\operatorname{arctg}(-a) = -\operatorname{arctg} a$.
4. $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} \alpha) = \alpha$, якщо $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

Примітка. Арктангенс — це кут, який належить проміжку $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, тому в деяких завданнях, у яких потрібно обчислити тригонометричну функцію від арктангенса, то зручно позначити його якою небудь грецькою літерою α , β і т. ін.

Ілюстративні приклади

6. Обчисліть $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} 2 + \operatorname{arctg} 3)$.

Розв'язання. Нехай $\operatorname{arctg} 2 = \alpha$, $\operatorname{arctg} 3 = \beta$, де $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$, $-\frac{\pi}{2} < \beta < \frac{\pi}{2}$.

Тоді $\operatorname{tg} \alpha = 2$, $\operatorname{tg} \beta = 3$.

За формулою, $\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}$, отримаємо

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} 2 + \operatorname{arctg} 3) = \frac{2 + 3}{1 - 2 \cdot 3} = \frac{5}{-5} = -1.$$

Відповідь. -1 .

7. Обчисліть $\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg} \frac{3\pi}{4}\right)$.

Розв'язання. Оскільки $\frac{3\pi}{4} > \frac{\pi}{2}$, то не можна одразу застосовувати формулу $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) = x$.

Тому $\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right)\right) = \operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) = -\frac{\pi}{4}$.

Відповідь. $-\frac{\pi}{4}$.

8. Обчисліть $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} 23)$.

Розв'язання. Оскільки $23 > \frac{\pi}{2}$, то не можна одразу застосовувати формулу $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) = x$.

Оскільки $0 < 23 - 7\pi < \frac{\pi}{2}$, то $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} 23) = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg}(23 - 7\pi)) = 23 - 7\pi$.

Відповідь. $23 - 7\pi$.

IV. Розв'язування рівнянь $\operatorname{tg} x = a$

Розв'язками рівняння $\operatorname{tg} x = a$ є множина $x = \operatorname{arctg} a + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Ілюстративні приклади

9. Розв'яжіть рівняння $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \sqrt{3}$.

Розв'язання. Оскільки функція $f(x) = \operatorname{tg} x$ — непарна, то:

$$\operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{3}, \quad x - \frac{\pi}{4} = \operatorname{arctg}(-\sqrt{3}) + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z},$$

$$x - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{3} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad x = -\frac{\pi}{12} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Відповідь. $-\frac{\pi}{12} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$.

10. Розв'яжіть рівняння $\operatorname{tg} \frac{2x}{3} = -3$.

Розв'язання. $\operatorname{tg} \frac{2x}{3} = -3$,

$$\frac{2x}{3} = \operatorname{arctg}(-3) + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad \frac{2x}{3} = -\operatorname{arctg} 3 + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z},$$

$$x = -\frac{3\operatorname{arctg} 3}{2} + \frac{3\pi n}{2}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Відповідь. $-\frac{3\operatorname{arctg} 3}{2} + \frac{3\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}$.

11. Розв'яжіть рівняння $\operatorname{tg}^2 x = 3 \operatorname{tg} x$.

Розв'язання. $\operatorname{tg}^2 x = 3 \operatorname{tg} x$, $\operatorname{tg}^2 x - 3 \operatorname{tg} x = 0$, $\operatorname{tg} x (\operatorname{tg} x - 3) = 0$. $\operatorname{tg} x = 0$ або $\operatorname{tg} x = 3$.

Тоді $x = \operatorname{arctg} 0 + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$ або $x = \operatorname{arctg} 3 + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Звідси $x = \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$ або $x = \operatorname{arctg} 3 + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Відповідь. πn , $\operatorname{arctg} 3 + \pi k$, $n \in \mathbb{Z}$, $k \in \mathbb{Z}$.

V. Розв'язування рівнянь $\operatorname{tg} x = a$ на заданому проміжку

Розв'язування рівнянь виду $\operatorname{tg} x = a$ на заданому проміжку виконують за певною послідовністю дій.

- 1) Знайдіть головний розв'язок, той що належить проміжку $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.
- 2) Знайдіть загальний розв'язок рівняння.
- 3) Запишіть подвійну нерівність для знайденого кореня, наприклад $a < x \leq b$, якщо за умовою корені належать проміжку $(a; b]$ та розв'яжіть її.
- 4) Знайдіть усі розв'язки в межах заданого проміжку. Якщо їх важко знайти, то скористайтеся графіком або одиничним колом.

Ілюстративні приклади

- 12.** Знайдіть усі корені рівняння $\operatorname{tg} 2x = -\sqrt{3}$, що належать проміжку $x \in [-2\pi; 2\pi]$.

Розв'язання. $\operatorname{tg} 2x = -\sqrt{3}$, $2x = \operatorname{arctg}(-\sqrt{3}) + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$,

$$2x = -\frac{\pi}{3} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad x = -\frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{2}, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad -2\pi \leq -\frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{2} \leq 2\pi,$$

$$-2 \leq -\frac{1}{6} + \frac{n}{2} \leq 2, \quad -12 \leq -2 + 3n \leq 12, \quad -10 \leq 3n \leq 14, \quad -3\frac{1}{3} \leq n \leq 4\frac{2}{3}.$$

Цілі значення n , що задовольняють нерівність: 0; 1; -1; 2; -2; 3; -3; 4.

Якщо $n = 0$, то $x = -\frac{\pi}{6}$.

Якщо $n = 1$, то $x = \frac{\pi}{3}$.

Якщо $n = -1$, то $x = -\frac{2\pi}{3}$.

Якщо $n = 2$, то $x = \frac{5\pi}{6}$.

Якщо $n = -2$, то $x = -\frac{7\pi}{6}$.

Якщо $n = 3$, то $x = \frac{4\pi}{3}$.

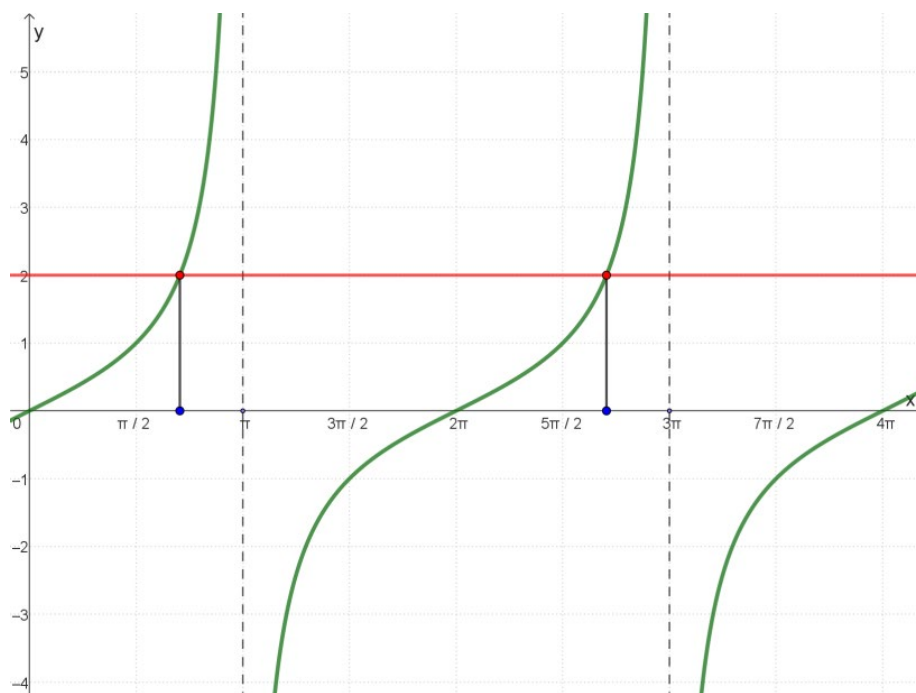
Якщо $n = -3$, то $x = -\frac{5\pi}{3}$.

Якщо $n = 4$, то $x = \frac{11\pi}{6}$.

Відповідь. $-\frac{5\pi}{3}; -\frac{7\pi}{6}; -\frac{2\pi}{3}; -\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{3}; \frac{5\pi}{6}; \frac{4\pi}{3}; \frac{11\pi}{6}$.

- 13.** Знайдіть кількість коренів рівняння $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = 2$, що належить проміжку $x \in [0; 4\pi]$.

Розв'язання. Побудуємо в одній системі координат графіки функції $y = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ та прямої $y = 2$ на проміжку $[0; 4\pi]$ (див. рисунок).



Таким чином, рівняння має два розв'язки на проміжку $[0; 4\pi]$.

Відповідь. Два.

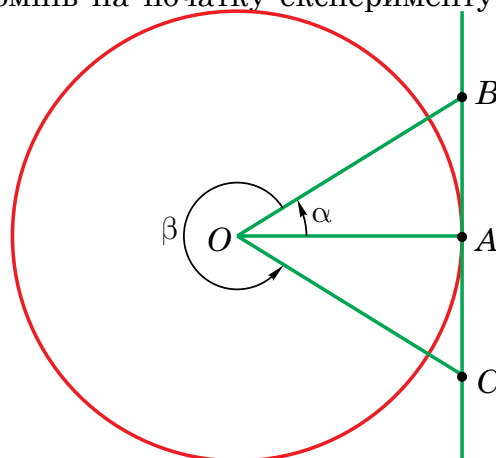
VI. Розв'язування практичної задачі. Групова активність (5–7 хв)

Як я вирішую певну проблему?

Задача. Інженер, розробляючи лазерну систему наведення, встановив лазер на відстані 2 м від стіни так, що лазер випромінює промені перпендикулярно до стіни. Лазер планується обертати в горизонтальній площині, проти руху годинникової стрілки, і досліджувати швидкість руху точки променя по стіні. Спеціальні датчики встановлені на стіні, в площині обертання лазера, на відстанях 1,5 м в обидва боки від точки, в яких лазер випромінював промінь на початку експерименту. Визначте загальну формулу для знаходження всіх кутів повороту лазера (у радіанах), при яких кінцева точка променя проходить через датчики.

Розв'язання. 1) Виконаємо побудову (див. рисунок).

2) Нехай випромінювач лазерного променя знаходиться в точці O , точка A — початкове положення кінцевої точки променя на стіні, а точки B і C — розташування датчиків.



Кути α та β — це кути, які задовольняють умову задачі при першому оберті лазера.

3) Із трикутника OAB : $\operatorname{tg} \alpha = \frac{AB}{OA}$, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1,5}{2}$, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{4}$.

Оскільки $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$, то $\alpha = \operatorname{arctg} \frac{3}{4}$.

4) $\triangle OAB = \triangle OAC$, за двома катетами. Отже, $\beta = 2\pi - \alpha$.

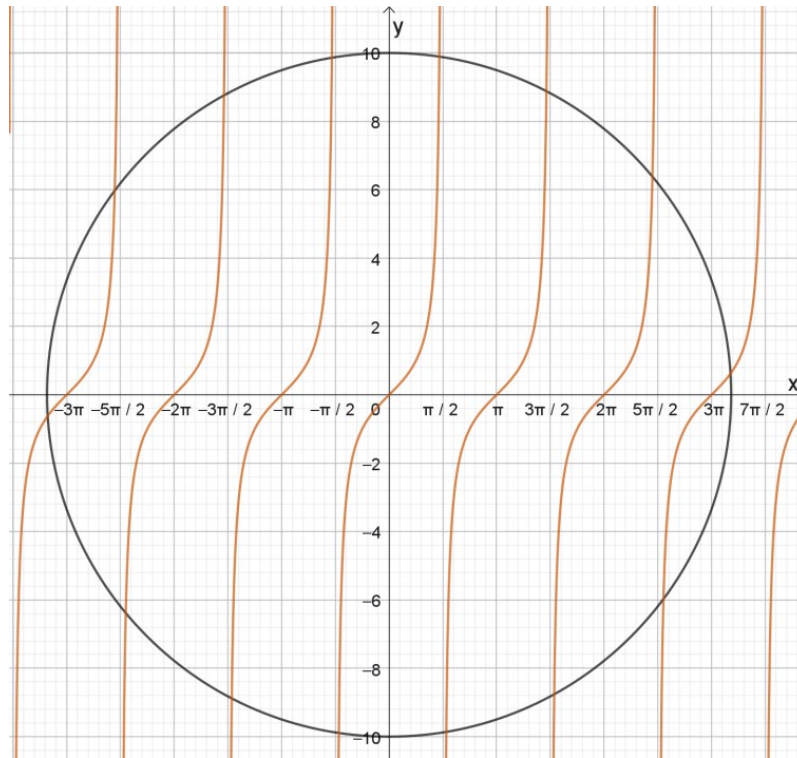
5) Таким чином, кути $\operatorname{arctg} \frac{3}{4} + 2\pi n$ та $2\pi - \operatorname{arctg} \frac{3}{4} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, задовольняють умову задачі.

Відповідь. $\operatorname{arctg} \frac{3}{4} + 2\pi n$; $2\pi - \operatorname{arctg} \frac{3}{4} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Задача 2. Олімпіадна задача. Визначте кількість коренів рівняння $x^2 + \operatorname{tg}^2 x = 100$.

Розв'язання. Оскільки $\operatorname{tg}^2 x = 100 - x^2$, то $\operatorname{tg} x = \pm \sqrt{100 - x^2}$.

Побудуємо в одній системі координат графіки функцій $y = \operatorname{tg} x$ і $y = \pm \sqrt{100 - x^2}$ — коло з центром у початку координат і з радіусом 10.



Графіки мають 14 точок перетину, тобто рівняння має 14 розв'язків.

Відповідь. 14.

VII. Тренувальні вправи. Три рівні складності: А, В, С (8–10 хв)

Рівень А

1. Обчисліть:

1) $\cos(\operatorname{arctg} 1 + \operatorname{arctg} 1)$;

2) $\operatorname{tg}\left(\arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} + \operatorname{arctg} \sqrt{3}\right)$;

3) $\operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{3}} - \operatorname{arctg} \sqrt{3}$;

4) $\operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \operatorname{arctg} 1$.

2. Чи може $\operatorname{arctg} x$ дорівнювати:

1) 0;

2) $\frac{\pi}{2}$;

3) $\sqrt{3}$;

4) $\frac{2\pi}{3}$;

5) $-\frac{\pi}{4}$;

6) $\frac{\pi}{3}$?

3. Розв'яжіть рівняння:

1) $\operatorname{tg} 5x = 1$;

2) $1 + \operatorname{tg} \frac{x}{3} = 0$;

3) $\operatorname{tg} 3x = 0$;

4) $\sqrt{3} - \operatorname{tg} \frac{x}{6} = 0$;

4. Розв'яжіть рівняння:

1) $\operatorname{tg} x = -\frac{1}{3}$;

2) $\operatorname{tg} x = 0,25$;

3) $\operatorname{tg} x = 3$;

4) $\operatorname{tg} x = -50$;

5. Розв'яжіть рівняння:

1) $\operatorname{tg}\left(2x - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$;

2) $\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} - 1\right) = 0,2$;

3) $\operatorname{tg} 3x = 1,1$;

4) $\operatorname{tg} 6x = -9$;

6. Скільки коренів рівняння $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ належать проміжку $\left[-\frac{\pi}{2}; 2\pi\right]$?

Рівень В

1. Обчисліть:

1) $\operatorname{ctg}(\operatorname{arctg} \sqrt{3})$;

2) $\sin\left(\operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$;

3) $\operatorname{ctg}(\operatorname{arctg} 1)$;

4) $\cos(\operatorname{arctg} 1)$;

5) $\sin(\operatorname{arctg}(-\sqrt{3}))$;

6) $\cos(\operatorname{arctg}(-\sqrt{3}))$.

2. Розв'яжіть рівняння:

1) $\operatorname{tg}\left(-\frac{x}{3} + \frac{\pi}{6}\right) = 5$;

2) $3 \operatorname{tg}(2x - 7) = -3$.

3. Розв'яжіть рівняння:

1) $\operatorname{tg} \frac{3\pi}{2x} = 0$;

2) $\operatorname{tg} \frac{2\pi}{x} = 1$;

3) $\operatorname{tg} \frac{\pi}{4x} = 1$;

4) $\operatorname{tg} \frac{3}{x} = -1$.

4. Знайдіть усі корені рівняння, що належать даному проміжку:

1) $\operatorname{tg} 4x = 3$, $x \in \left[-\pi; \frac{\pi}{2}\right]$;

2) $\operatorname{tg} 3x = -2$, $x \in [-\pi; 2\pi]$.

5. Розв'яжіть рівняння:

1) $(\operatorname{tg} x + 1)(\operatorname{tg} x - \sqrt{3}) = 0$;

2) $(\operatorname{tg} x + 5)(1 - 2\cos x) = 0$;

3) $(\sqrt{3}\operatorname{tg} x - 1)(\operatorname{tg} x + \sqrt{3}) = 0$;

4) $(\operatorname{tg} x - 3)\left(\sin \frac{x}{2} + 1\right) = 0$;

6. Розв'яжіть рівняння:

1) $\left(2\operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + 1\right)(3\operatorname{tg} x - 1) = 0$;

2) $\left(1 - \sqrt{3}\operatorname{tg} \frac{x}{3}\right)(1 - \sqrt{3}\operatorname{tg} x) = 0$.

7. Обчисліть:

1) $\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg} \frac{11\pi}{7}\right)$; 2) $\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg} \frac{23\pi}{9}\right)$; 3) $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} 13)$; 4) $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} 7)$.

8. Знайдіть усі корені рівняння, що належать даному проміжку:

1) $\operatorname{tg}^2 x = 3$, $x \in [-\pi; \pi]$;

2) $\operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{3}$, $(0; 2\pi)$.

9. Обчисліть:

1) $\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg} \frac{8}{7}\pi\right)$;

2) $\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg} \frac{9}{5}\pi\right)$.

10. Доведіть, якщо $ab \neq 1$, то $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} a + \operatorname{arctg} b) = \frac{ab}{1 - ab}$.

11. Доведіть, якщо $-1 < a < 1$, то $\arcsin a = \operatorname{arctg} \frac{a}{\sqrt{1 - a^2}}$.

12. При яких значеннях параметра a має розв'язки рівняння $\frac{\sin x - a}{3\operatorname{tg}^2 x - 1} = 0$?

Рівень С

1. Розв'яжіть рівняння:

1) $\operatorname{tg}(2x) \cdot \sqrt{16 - x^2} = 0$;

2) $\operatorname{tg}\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) \cdot \sqrt{6 - |x|} = 0$.

2. Обчисліть:

1) $\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg} \frac{1}{3} + \operatorname{arctg} \frac{2}{5}\right)$;

2) $\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg} 2 - \operatorname{arctg} \frac{3}{5}\right)$;

3) $\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\arccos\left(-\frac{4}{7}\right)\right)$;

4) $\operatorname{tg}\left(2\arcsin \frac{3}{5}\right)$.

3. При яких значеннях параметра a рівняння $(x + a)(\operatorname{ctg} x - 1) = 0$ на проміжку $\left[-\frac{\pi}{2}; 0\right)$ має єдиний корінь?

4. Розв'яжіть рівняння:

1) $8\operatorname{tg}^3 x + 1 = 0$;

2) $27\operatorname{tg}^3 x - 8 = 0$;

3) $9\operatorname{tg}^4 x = 1$;

4) $16\operatorname{tg}^4 2x = 1$.

5. При яких додатних значеннях параметра a проміжок $\left[-a; \frac{\pi}{2}\right]$ містить не менше

трьох коренів рівняння $\operatorname{tg} x = \frac{\sqrt{3}}{3}$?

6. Доведіть рівність:

1) $\arctg 2 + \arctg 3 = \frac{3\pi}{4}$;

2) $\arctg \frac{1}{2} + \arctg \frac{1}{3} = \frac{\pi}{4}$.

7. **Творче завдання.** Запрограмуйте алгоритм, який визначає кількість коренів рівняння $\operatorname{tg} x = a$ на заданому проміжку.

VIII. Рефлексія. «Плюс-Мінус-Цікавинка» (1–2 хв)

(+) що було зрозумілим:

(–) що залишилося незрозумілим:

(?) що здивувало або зацікавило:

Можливі теми проєктів

1. Використання рівнянь $\operatorname{tg} x = a$ в авіації для розрахунку траєкторії зльоту літаків.
2. Визначення часу заходу Сонця, якщо відома висота спостерігача над рівнем моря.
3. Розрахунок кута підйому дорожнього покриття у гірських місцевостях.
4. Використання рівняння $\operatorname{tg} x = a$ у віртуальних симуляторах та відеоіграх.
5. Розрахунок кута нахилу сонячних панелей за допомогою рівняння $\operatorname{tg} x = a$.