

Тема 4.

Числові послідовності. Границі числових послідовностей

Урок 1. Числові послідовності

РОБОЧИЙ АРКУШ

(моє ім'я)

I. Очікувані результати навчальних досягнень

На уроці ви навчитеся:

- 1) пояснювати, що таке числова послідовність і як вона утворюється;
- 2) розпізнавати числові послідовності серед інших наборів чисел;
- 3) наводити приклади послідовностей із реального життя;
- 4) розрізняти способи задання послідовностей;
- 5) знаходити кілька перших членів послідовності за заданим правилом;
- 6) будувати власні послідовності за закономірністю;
- 7) виявляти закономірності у числових послідовностях;
- 8) розуміти, де в житті застосовуються послідовності;
- 9) працювати в парі чи групі, порівнюючи різні способи задання послідовностей;
- 10) оцінювати власні успіхи у вивченні теми.

II. Повторення

1. Оберіть число, яке є розв'язком нерівності $3,7 < x < 3,8$.

А	Б	В	Г	Д
$3\frac{2}{7}$	$3\frac{3}{7}$	$3\frac{4}{7}$	$3\frac{5}{7}$	$3\frac{6}{7}$

2. Знайдіть значення виразу $(a + 1)^2 - 3^2$, якщо $a = -1$.

А	Б	В	Г	Д
-9	-5	0	5	9

3. Розташуйте числа в порядку зростання: $a = \frac{3}{5} + \frac{1}{2}$, $b = 3\frac{2}{3} - 2$, $c = \frac{4}{5} + \frac{8}{15}$.

А	Б	В	Г	Д
abc	acb	cab	bac	cba

4. Визначте кількість усіх дробів зі знаменником 28, котрі більші за $\frac{4}{7}$, але не більші від $\frac{3}{4}$, якщо чисельник кожного дробу – натуральне число. (ЗНО, 2006 р.).

А	Б	В	Г	Д
один	два	чотири	п'ять	шість

5. Обчисліть вираз $0,1(3) + 2\frac{1}{3} + 0,(2)$. Відповідь округліть до тисячних.

III. Означення числової послідовності

Означення. Числова послідовність — це впорядкований ряд чисел, які утворюються за певним правилом.

Числа, які утворюють числову послідовність, називають **членами послідовності**. Кожний член послідовності має свій **номер**, який є натуральним числом. Узагалі, якщо член послідовності має номер n , то його називають **n -им членом** послідовності.

Можна вважати, що нескінченна послідовність є функцію, областю визначення якої є множина $\mathbb{N}$, а скінченна послідовність, що складається з n членів, — це функція, область визначення якої — множина n перших натуральних чисел.

Приклади числових послідовностей:

1, 2, 3, 4, 5, ... — послідовність натуральних чисел;

2, 4, 6, 8, 10, ... — послідовність парних натуральних чисел;

-1, -3, -5, -7, ... — послідовність непарних від'ємних чисел;

2, 3, 5, 7, 11, ... — послідовність простих чисел;

0,3; 0,33; 0,333; ... — послідовність десяткових наближень дробу $\frac{1}{3}$;

З прикладів бачимо, що послідовності бувають скінченними та нескінченними.

Означення. Числову послідовність, яка має необмежену кількість членів, називають **нескінченною**.

Варто також вказати, що в деяких послідовностях всі члени є рівними між собою.

послідовність стаціонарною?

[illegible]

ності, підставивши замість n його номер. А формула $b_n = 5$ задає стаціонарну послідовність, усі члени якої – це число 5.

4) **Рекурентно** (від латин. *resurro* – повертатися) — за допомогою початкових умов, що визначають перший або кілька перших членів послідовності та формули, яка виражає будь-який член послідовності через один або кілька попередніх членів.

Наприклад, умова $a_1 = 2$ та формула $a_{n+1} = a_n + 7$, де $n \in \mathbb{N}$ задають послідовність натуральних чисел, які при діленні на 7 дають остачу 2.

Приклад 2. Послідовність (c_n) задано формулою n -го члена $c_n = 37 - 3n$. Чи є членом цієї послідовності число 19? У разі ствердної відповіді вкажіть номер цього члена.

[illegible]

Приклад 3. Послідовність (a_n) задано рекурентно: $a_1 = 15$, $a_{n+1} = 7a_n + 1$. Чи може число 1001 бути членом цієї послідовності?

[illegible]

Приклад 4. Послідовність (a_n) задано рекурентно: $a_1 = 5$, $a_2 = 13$, $a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n$. Доведіть, що цю послідовність можна задати формулою n -го члена $a_n = 2^n + 3^n$.

Розв'язання. Доведення проведемо методом математичної індукції.

1) *База індукції.*

При $n = 1$ отримуємо: $a_1 = 5 = 2^1 + 3^1$.

При $n = 2$ отримуємо: $a_2 = 13 = 2^2 + 3^2$.

2) *Крок індукції.*

Нехай $a_k = 2^k + 3^k$ і $a_{k+1} = 2^{k+1} + 3^{k+1}$. Доведемо, що: $a_{k+2} = 2^{k+2} + 3^{k+2}$.

3) Доведення.

$$\begin{aligned} a_{k+2} &= 5a_{k+1} - 6a_k = 5 \cdot 2^{k+1} + 5 \cdot 3^{k+1} - 6 \cdot 2^k - 6 \cdot 3^k = 5 \cdot 2^k \cdot 2 + 5 \cdot 3^k \cdot 3 - 6 \cdot 2^k - 6 \cdot 3^k = \\ &= 4 \cdot 2^k + 9 \cdot 3^k = 2^{k+2} + 3^{k+2}. \end{aligned}$$

4) Отже, $a_n = 2^n + 3^n$, що і треба було довести.

VI. Розв'язування практичної задач

Як я вирішую певну проблему?

Задача. У морозильній камері шматок льоду має масу 900 г. Кожного дня тоне половина тієї маси від цього шматка, що перевищує 100 г. Через скільки днів маса цього шматка льоду буде меншою від 120 г?

VII. Тренувальні вправи. Три рівні складності: А, В, С

Рівень А

1. Запишіть у порядку зростання п'ять перших членів послідовності:
1) двоцифрових чисел, кратних числу 4;
2) неправильних звичайних дробів із чисельником 11;
3) натуральних чисел, що дають при діленні на 8 остачу 5.
Укажіть, скінченними чи нескінченними є ці послідовності.
2. Знайдіть чотири перших члени послідовності (a_n) , заданої формулою n -го члена:
1) $a_n = 4n - 3$; 2) $a_n = \frac{n}{n^2 + 1}$; 3) $a_n = \frac{2^n}{n}$; 4) $a_n = \left\{ n + \frac{1}{2} \right\}$.
3. Знайдіть другий, сьомий і сотий члени послідовності (b_n) , заданої формулою n -го члена:
1) $b_n = n^2 + 2n$; 2) $b_n = \frac{1 + (-1)^n}{n}$; 3) $b_n = \left[n + \frac{1}{2} \right]$.
4. Послідовність (c_n) задано формулою n -го члена $c_n = (-1)^n \cdot 5$. Знайдіть:
1) c_1 ; 2) c_8 ; 3) c_{2k} ; 4) c_{2k+1} .
5. Знайдіть п'ять перших членів послідовності (a_n) , якщо:
1) $a_1 = 4$, $a_{n+1} = a_n + 3$; 2) $a_1 = -2$, $a_2 = 6$, $a_{n+2} = 3a_n + a_{n+1}$;
3) $a_1 = 1$, $a_2 = -2$, $a_{n+2} = \frac{a_{n+1}}{a_n}$.
6. Знайдіть п'ять перших членів послідовності (b_n) , якщо:
1) $b_1 = 18$, $b_{n+1} = -\frac{b_n}{3}$; 2) $b_1 = -1$, $b_2 = 2$, $b_{n+2} = b_n^2 + 2b_{n+1}$;
3) $b_1 = -1$, $b_{n+1} = \frac{1}{b_n}$.
7. Послідовність (a_n) задано формулою n -го члена $a_n = 7n + 2$. Чи є членом цієї послідовності число: 1) 149; 2) 47? У разі ствердної відповіді вкажіть номер цього члена.
8. Послідовність (b_n) задано формулою n -го члена $a_n = 7n + 2$. Чи є членом цієї послідовності число: 1) 16; 2) 77? У разі ствердної відповіді вкажіть номер цього члена.
9. Послідовність (a_n) задано рекурентно: $a_1 = 1$, $a_{n+1} = a_n + 3$. Чи є членом цієї послідовності число 999?
10. Послідовність (b_n) задано рекурентно: $b_1 = 2$, $b_{n+1} = 2b_n$. Чи є членом цієї послідовності число 1024?

Рівень В

1. Скільки від'ємних членів містить послідовність (x_n) , задана формулою n -го члена $x_n = 6n - 50$?
2. Знайдіть номер першого від'ємного члена послідовності (y_n) , заданої формулою n -го члена $y_n = 38 - 3n$.

- ## Рівень С

- 16

8. Знайдіть формулу n -го члена послідовності, заданої рекурентно:

1) $a_1 = 1, a_{n+1} = 2a_n + 1$; 2) $a_1 = \frac{1}{2}, a_{n+1} = \frac{1}{2 - a_n}$;

3) $a_1 = 0, a_{n+1} = a_n + 2\sqrt{a_n + 1} + 1$.

9. Послідовність задано рекурентно: $a_1 = 1, a_{n+1} = a_n + 8n$. Доведіть, що будь-який член цієї послідовності є квадратом натурального числа.

10. Послідовність задано рекурентно: $a_1 = 1, a_{n+1} = a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 + n$. Доведіть, що в цій послідовності всі члени, крім першого, не є квадратами натуральних чисел.

Рефлексія

Оцініть розуміння теми уроку балами від 1 до 10.

Мої враження від уроку

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Жахливі									Чудові

Назвіть дві речі, які вам сподобалися на уроці, й одну річ, яка вам не сподобалася, або у вас усе ще залишилися запитання.

1)

2)

?

Можливі теми проєктів

1. «Числа, що розповідають історію» – послідовності, які змінили науку.
2. Використання числових послідовностей у цифровому світі – програмування, шифрування, QR-коди тощо.
3. Конструювання власних числових послідовностей.







