

Тема 4.

Числові послідовності.

Границі числових послідовностей

Урок 1. Числові послідовності

План уроку

1. Означення числової послідовності.
2. Способи задання числових послідовностей.

Очікувані результати навчальних досягнень

Учень/учениця:

досліджує специфічну проблемну ситуацію, використовуючи різноманітні інформаційні джерела [12 МАО 1.2.1–1 П];

визначає межі даних, формулює припущення щодо даних у специфічних проблемних ситуаціях [12 МАО 1.2.3–1 П];

обирає серед кількох різних стратегій розв'язання специфічних проблемних ситуацій таку, що задовольняє певні умови [12 МАО 2.2.2–1 П];

здійснює перехід від абстрактного до конкретного та від конкретного до абстрактного [12 МАО 2.3.1–2 П];

добирає доцільні математичні поняття, факти і послідовність дій для розв'язання проблемних ситуацій [12 МАО 4.2.1–1 П].

Дружні поради вчителю/вчительці до уроку

- 1) Сформулюйте учням/ученицям мотиваційні запитання щодо матеріалу уроку.
- 2) Запропонуйте учням/ученицям, на ваш вибір, завдання на повторення вивченого.
- 3) Сформулюйте практичну задачу (без розв'язання). Розв'язання пропонуємо у вигляді групової роботи наприкінці уроку.
- 4) Теорію подавайте стисло, акцентуйте увагу (коли можливо) на її практичному застосуванні.
- 5) До теоретичних тверджень наведено ілюстративні задачі. Обирайте ілюстративні задачі на власний розсуд.

- 6) Увесь запропонований матеріал неможливо подати в часових вимірах одного уроку, тому обирайте кількість матеріалу на власний розсуд.
- 7) Заплануйте розв'язання практичної задачі. Об'єднайте учнів/учениць у кілька груп. Під час розв'язання задачі групами важливо формувати комунікаційні навички, знаходити математичного партнера, з яким під силу розв'язати задачу, інтегрувати здобуті знання у розв'язання практичних задач.
- 8) Обов'язково пропонуйте учням/ученицям самотужки або в групах розв'язувати тренувальні завдання за трьома рівнями складності маркування – на вибір учня/учениці. Формуйте навички розв'язання прикладів та задач та навчайте учнів/учениць самостійної роботи над завданнями.
- 9) Мотивуйте учнів/учениць до проєктної діяльності. Запропонуйте учням/ученицям обрати теми для індивідуальних (групових) проєктів. Робота над обраним проєктом може тривати впродовж вивчення (повторення) усієї змістової теми. Створення проєктів та їхній захист можуть бути альтернативою контрольної роботи з теми.
- 10) Темати проєктів можуть бути запропоновані вами практичні завдання за рівнями складності В або С. Можливі теми для створення проєктів запропоновані.
- 11) Запропонуйте учням/ученицям дати відповіді на запитання для рефлексії.

I. Організаційна частина (2 хв)

Мотиваційні запитання

- 1) Чи помічали ви, що багато явищ у природі мають певний порядок або закономірність (зміна пір року, ріст рослин, чергування дня й ночі)? Як це можна описати числами?
- 2) Якщо кожного дня ви відкладаєте по 10 гривень, як можна описати зміну вашої суми з часом?
- 3) Чому важливо вміти описувати закономірність у зміні чисел? Де це може стати у пригоді — у спорті, фінансах, науці?
- 4) Який спосіб зручніше використовувати: перелічити всі елементи послідовності чи задати формулу для знаходження будь-якого члена цієї послідовності? Чому?
- 5) Як би ви описали послідовність номерів у вашому класному журналі?

II. Повторення (4–5 хв)

1. Оберіть число, яке є розв'язком нерівності $3,7 < x < 3,8$.

А	Б	В	Г	Д
$3\frac{2}{7}$	$3\frac{3}{7}$	$3\frac{4}{7}$	$3\frac{5}{7}$	$3\frac{6}{7}$

Відповідь. Г.

2. Знайдіть значення виразу $(a + 1)^2 - 3^2$, якщо $a = -1$.

А	Б	В	Г	Д
-9	-5	0	5	9

Відповідь. А.

3. Розташуйте числа в порядку зростання: $a = \frac{3}{5} + \frac{1}{2}$, $b = 3\frac{2}{3} - 2$, $c = \frac{4}{5} + \frac{8}{15}$.

А	Б	В	Г	Д
abc	acb	cab	bac	cba

Відповідь. Б.

4. Визначте кількість усіх дробів зі знаменником 28, котрі більші за $\frac{4}{7}$, але не більші від $\frac{3}{4}$, якщо чисельник кожного дробу – натуральне число. (ЗНО, 2006 р.).

А	Б	В	Г	Д
один	два	чотири	п'ять	шість

Відповідь. Г.

5. Обчисліть вираз $0,1(3) + 2\frac{1}{3} + 0,(2)$. Відповідь округліть до тисячних.

Відповідь. 2,689.

Як я вирішую певну проблему?

- Задача.** У морозильній камері шматок льоду має масу 900 г. Кожного дня тоне половина тієї маси від цього шматка, що перевищує 100 г. Через скільки днів маса цього шматка льоду буде меншою від 120 г?

III. Означення числової послідовності

Означення. Числова послідовність — це впорядкований ряд чисел, які утворюються за певним правилом.

Числа, які утворюють числову послідовність, називають **членами послідовності**. Кожний член послідовності має свій **номер**, який є натуральним числом. Узагалі, якщо член послідовності має номер n , то його називають **n -им членом** послідовності.

Можна вважати, що нескінченна послідовність є функцію, областю визначення якої є множина $\mathbb{N}$, а скінченна послідовність, що складається з n членів, — це функція, область визначення якої — множина n перших натуральних чисел.

Приклади числових послідовностей:

- 1, 2, 3, 4, 5, ... — послідовність натуральних чисел;
- 2, 4, 6, 8, 10, ... — послідовність парних натуральних чисел;
- 1, -3, -5, -7, ... — послідовність непарних від'ємних чисел;
- 2, 3, 5, 7, 11, ... — послідовність простих чисел;

0,3; 0,33; 0,333; ... — послідовність десяткових наближень дробу $\frac{1}{3}$;

25, 50, 75 — послідовність двоцифрових чисел, кратних 25;

0, 1, 2, 3, 4 — послідовність остач від ділення цілих чисел на число 5.

З прикладів бачимо, що послідовності бувають скінченними та нескінченними.

Означення. Числову послідовність, яка має обмежену кількість членів, називають **скінченною**.

Означення. Числову послідовність, яка має необмежену кількість членів, називають **нескінченною**.

У загальному випадку кожен член числової послідовності позначають за допомогою індексів, які вказують на номер цього члена: $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$, а саму послідовність позначають у вигляді запису (a_n) .

Варто також вказати, що в деяких послідовностях всі члени є рівними між собою.

Означення. Послідовність, усі члени якої рівні, називають **стаціонарною**.

Ілюстративні приклади

- 6.** Запишіть перші 5 членів послідовності (a_n) заданої формулою: $a_n = (-1)^n$. Чи є дана послідовність стаціонарною?

Розв'язання. 1) Якщо $n = 1$, то $a_1 = (-1)^1 = -1$.

2) Якщо $n = 2$, то $a_2 = (-1)^2 = 1$.

3) Якщо $n = 3$, то $a_3 = (-1)^3 = -1$.

4) Якщо $n = 4$, то $a_4 = (-1)^4 = 1$.

5) Якщо $n = 5$, то $a_5 = (-1)^5 = -1$.

Відповідь. -1, 1, -1, 1, -1. Ні.

- 7.** Послідовність (b_n) задано формулою: $b_n = \begin{cases} 1^{2n-1}, & n \text{ — непарне,} \\ (-1)^n, & n \text{ — парне,} \end{cases}$ Чи є вказана послідовність стаціонарною?

Розв'язання. 1) Якщо $n = 1$, то $b_n = 1^{2 \cdot 1 - 1} = 1$.

2) Якщо $n = 2$, то $b_n = (-1)^2 = 1$.

3) Якщо $n = 3$, то $b_n = 1^{2 \cdot 3 - 1} = 1$.

4) Якщо $n = 4$, то $b_n = (-1)^4 = 1$.

5) Отже, оскільки $1^{2n-1} = 1$, а для всіх парних n правильна рівність $(-1)^n = 1$, то дана послідовність є стаціонарною.

Відповідь. Так.

IV. Способи задання числових послідовностей

Послідовність вважають заданою, якщо вказано правило, за допомогою якого можна знайти будь-який її член.

Розглянемо способи, якими можна задавати числові послідовності.

- 1) **Описовий** — спосіб, в якому послідовність задають словами.

Наприклад, «послідовність непарних цифр, записаних в порядку зростання» є скінченною числовою послідовністю, яка містить в собі п'ять членів, а «послідовність правильних звичайних дробів із чисельником 1, записаних в порядку спадання» є нескінченною числовою послідовністю.

2) **Табличний** — спосіб, в якому послідовність задають за допомогою таблиці.

Наприклад, таблиця, вказана нижче ілюструє послідовність кубів натуральних чисел від 1 до 10.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a_n	1	8	27	64	125	216	343	512	729	1000

3) **Формула n -го члена** — спосіб задання кожного члена послідовності за допомогою певної формули.

Наприклад, формула $a_n = 3^n$, де $n \in \mathbb{N}$, задає послідовність чисел, які є степенями числа 3. За допомогою вказаної формули можна визначити будь-який член послідовності, підставивши замість n його номер. А формула $b_n = 5$ задає стаціонарну послідовність, усі члени якої — це число 5.

4) **Рекурентно** (від латин. *recurro* — повертатися) — за допомогою початкових умов, що визначають перший або кілька перших членів послідовності та формули, яка виражає будь-який член послідовності через один або кілька попередніх членів.

Наприклад, умова $a_1 = 2$ та формула $a_{n+1} = a_n + 7$, де $n \in \mathbb{N}$ задають послідовність натуральних чисел, які при діленні на 7 дають остачу 2.

Ілюстративні приклади

8. Послідовність (c_n) задано формулою n -го члена $c_n = 37 - 3n$. Чи є членом цієї послідовності число 19? У разі ствердної відповіді вкажіть номер цього члена.

Розв'язання. 1) Якщо число 19 є членом даної послідовності, то існує таке натуральне значення n , при якому виконується рівність: $37 - 3n = 19$; $3n = 18$; $n = 6$.

2) Отже, $c_6 = 19$, тобто число 19 є шостим членом послідовності (c_n) .

Відповідь. Так. Шостий.

9. Послідовність (a_n) задано рекурентно: $a_1 = 15$, $a_{n+1} = 7a_n + 1$. Чи може число 1001 бути членом цієї послідовності?

Розв'язання.

I спосіб. 1) $a_1 = 15$, $a_2 = 7 \cdot 15 + 1 = 106$, $a_3 = 7 \cdot 106 + 1 = 743$, $a_4 = 7 \cdot 743 + 1 = 5202$.

2) Оскільки $a_3 < 1001 < a_4$, то не існує члена даної послідовності, який дорівнює 1001.

II спосіб. 1) Помічаємо, що $a_1 \equiv 1 \pmod{7}$, $a_2 \equiv 1 \pmod{7}$, $a_3 \equiv 1 \pmod{7}$ і кожний член послідовності (a_n) є цілим числом, яке при діленні на 7 дає в остачі 1.

2) Оскільки $1001 : 7$, тобто $1001 \equiv 0 \pmod{7}$, то число 1001 не може бути членом цієї послідовності.

Відповідь. Ні.

10. Послідовність (a_n) задано формулою n -го члена $a_n = \frac{n+1}{n}$. Задайте її рекурентно.

Розв'язання. 1) Якщо $n = 1$, то $a_1 = 2$.

2) З формули $a_n = \frac{n+1}{n}$ виразимо змінну n .

Маємо: $na_n = n + 1$; $na_n - n = 1$; $n(a_n - 1) = 1$; $n = \frac{1}{a_n - 1}$.

3) Таким чином: $a_{n+1} = \frac{n+2}{n+1} = \frac{\frac{1}{a_n - 1} + 2}{\frac{1}{a_n - 1} + 1} = \frac{2a_n - 1}{a_n}$.

Відповідь. $a_1 = 2$, $a_{n+1} = \frac{2a_n - 1}{a_n}$.

11. Послідовність (a_n) задано рекурентно: $a_1 = 5$, $a_2 = 13$, $a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n$. Доведіть, що цю послідовність можна задати формулою n -го члена $a_n = 2^n + 3^n$.

Розв'язання. Доведення проведемо методом математичної індукції.

1) **База індукції.**

При $n = 1$ отримуємо: $a_1 = 5 = 2^1 + 3^1$.

При $n = 2$ отримуємо: $a_2 = 13 = 2^2 + 3^2$.

2) **Крок індукції.**

Нехай $a_k = 2^k + 3^k$ і $a_{k+1} = 2^{k+1} + 3^{k+1}$. Доведемо, що: $a_{k+2} = 2^{k+2} + 3^{k+2}$.

3) **Доведення.**

$$a_{k+2} = 5a_{k+1} - 6a_k = 5 \cdot 2^{k+1} + 5 \cdot 3^{k+1} - 6 \cdot 2^k - 6 \cdot 3^k = 5 \cdot 2^k \cdot 2 + 5 \cdot 3^k \cdot 3 - 6 \cdot 2^k - 6 \cdot 3^k = 4 \cdot 2^k + 9 \cdot 3^k = 2^{k+2} + 3^{k+2}.$$

4) Отже, $a_n = 2^n + 3^n$, що і треба було довести.

VI. Розв'язування практичної задачі. Групова активність (5 хв)

Як я вирішую певну проблему?

Задача. У морозильній камері шматок льоду має масу 900 г. Кожного дня тане половина тієї маси від цього шматка, що перевищує 100 г. Через скільки днів маса цього шматка льоду буде меншою від 120 г?

Розв'язання.

І спосіб. 1) Визначимо дану послідовність (a_n) рекурентною формулою:

$$a_1 = 900, a_n = a_{n-1} - \frac{1}{2}(a_{n-1} - 100) = \frac{1}{2}a_{n-1} + 50, \text{ причому } n > 1.$$

2) Таким чином, можемо обчислити перші шість членів даної послідовності:

$$a_1 = 900;$$

$$a_2 = \frac{1}{2}a_1 + 50 = \frac{900}{2} + 50 = 500;$$

$$a_3 = \frac{1}{2}a_2 + 50 = \frac{500}{2} + 50 = 300;$$

$$a_4 = \frac{1}{2}a_3 + 50 = \frac{300}{2} + 50 = 200;$$

$$a_5 = \frac{1}{2}a_4 + 50 = \frac{200}{2} + 50 = 150;$$

$$a_6 = \frac{1}{2}a_5 + 50 = \frac{150}{2} + 50 = 125.$$

II спосіб. 1) Визначимо дану послідовність (a_n) формулою n -го члена:

$$a_1 = 100 + 800;$$

$$a_2 = 100 + 800 \cdot \frac{1}{2};$$

$$a_3 = 100 + 800 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2;$$

$$a_4 = 100 + 800 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3;$$

...

$$a_n = 100 + 800 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}.$$

$$2) \text{ Отже, } a_6 = 100 + 800 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 = 125.$$

Відповідь. 125 г.

VII. Тренувальні вправи. Три рівні складності: А, В, С (8–10 хв)

Рівень А

1. Запишіть у порядку зростання п'ять перших членів послідовності:
 - 1) двоцифрових чисел, кратних числу 4;
 - 2) неправильних звичайних дробів із чисельником 11;
 - 3) натуральних чисел, що дають при діленні на 8 остачу 5.
 Укажіть, скінченними чи нескінченними є ці послідовності.
2. Знайдіть чотири перших члени послідовності (a_n) , заданої формулою n -го члена:
 - 1) $a_n = 4n - 3$;
 - 2) $a_n = \frac{n}{n^2 + 1}$;
 - 3) $a_n = \frac{2^n}{n}$;
 - 4) $a_n = \left\{n + \frac{1}{2}\right\}$.
3. Знайдіть другий, сьомий і сотий члени послідовності (b_n) , заданої формулою n -го члена:
 - 1) $b_n = n^2 + 2n$;
 - 2) $b_n = \frac{1 + (-1)^n}{n}$;
 - 3) $b_n = \left[n + \frac{1}{2}\right]$.
4. Послідовність (c_n) задано формулою n -го члена $c_n = (-1)^n \cdot 5$. Знайдіть:
 - 1) c_1 ;
 - 2) c_8 ;
 - 3) c_{2k} ;
 - 4) c_{2k+1} .
5. Знайдіть п'ять перших членів послідовності (a_n) , якщо:
 - 1) $a_1 = 4$, $a_{n+1} = a_n + 3$;
 - 2) $a_1 = -2$, $a_2 = 6$, $a_{n+2} = 3a_n + a_{n+1}$;
 - 3) $a_1 = 1$, $a_2 = -2$, $a_{n+2} = \frac{a_{n+1}}{a_n}$.
6. Знайдіть п'ять перших членів послідовності (b_n) , якщо:
 - 1) $b_1 = 18$, $b_{n+1} = -\frac{b_n}{3}$;
 - 2) $b_1 = -1$, $b_2 = 2$, $b_{n+2} = b_n^2 + 2b_{n+1}$;
 - 3) $b_1 = -1$, $b_{n+1} = \frac{1}{b_n}$.

7. Послідовність (a_n) задано формулою n -го члена $a_n = 7n + 2$. Чи є членом цієї послідовності число: 1) 149 ; 2) 47 ? У разі ствердної відповіді вкажіть номер цього члена.
8. Послідовність (b_n) задано формулою n -го члена $a_n = 7n + 2$. Чи є членом цієї послідовності число: 1) 16 ; 2) 77 ? У разі ствердної відповіді вкажіть номер цього члена.
9. Послідовність (a_n) задано рекурентно: $a_1 = 1$, $a_{n+1} = a_n + 3$. Чи є членом цієї послідовності число 999 ?
10. Послідовність (b_n) задано рекурентно: $b_1 = 2$, $b_{n+1} = 2b_n$. Чи є членом цієї послідовності число 1024 ?

Рівень В

1. Скільки від'ємних членів містить послідовність (x_n) , задана формулою n -го члена $x_n = 6n - 50$?
2. Знайдіть номер першого від'ємного члена послідовності (y_n) , заданої формулою n -го члена $y_n = 38 - 3n$.
3. Послідовність (a_n) задано формулою n -го члена $a_n = n^2 - 3n - 8$. Знайдіть номери членів цієї послідовності, які менші від 10.
4. Послідовність (b_n) задано формулою n -го члена $b_n = -n^2 + 15n - 20$. Скільки членів цієї послідовності більші за 16 ?
5. Підберіть одну з можливих формул n -го члена послідовності, першими членами якої є числа:

1) 1, 4, 9, 25, ... ;	2) 0, 2, 0, 2, 0, ... ;
3) 5, 8, 11, 14, 17, ... ;	4) 0, 1, 0, $\frac{1}{2}$, 0, $\frac{1}{3}$, 0, $\frac{1}{4}$, ... ;
5) 0, $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$, ... ;	6) 2, 0, $\frac{2}{3}$, 0, $\frac{2}{5}$, 0, $\frac{2}{7}$, 0,
6. Підберіть одну з можливих формул n -го члена послідовності, першими членами якої є числа:

1) 2, 9, 28, 65, 126, ... ;	2) $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{12}$, $\frac{1}{20}$, $\frac{1}{30}$, ... ;
3) -2 , $-\frac{1}{2}$, $-\frac{4}{3}$, $-\frac{3}{4}$, $-\frac{6}{5}$, $-\frac{5}{6}$, ... ;	4) 1, 2, $\frac{1}{3}$, 4, $\frac{1}{5}$, 6, $\frac{1}{7}$, ... ;
5) -1 , 1, 3, 3, 3,	
7. Послідовність (a_n) задано рекурентно: $a_1 = 4$, $a_{n+1} = \lceil \sqrt{a_n} \rceil$. Знайдіть a_{2010} .
8. Послідовність (a_n) задано формулою n -го члена. Задайте її рекурентно:

1) $a_n = 2n - 3$;	2) $a_n = \frac{n}{n+2}$;	3) $a_n = n^2$.
---------------------	----------------------------	------------------
9. Послідовність (a_n) задано формулою n -го члена. Задайте її рекурентно:

1) $a_n = n$;	2) $a_n = \frac{1}{n+1}$;	3) $a_n = \sqrt{n}$.
----------------	----------------------------	-----------------------
10. Чи існують такі значення a , при яких послідовність є стаціонарною:

1) $x_1 = a$, $x_{n+1} = x_n^2 - 4x_n + 6$;	2) $x_1 = a$, $x_{n+1} = x_n^2 - 3x_n + 5$?
---	---

Рівень С

1. Знайдіть сто перший член послідовності (a_n) , якщо $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_{n+2} = \frac{a_{n+1}}{a_n}$.
2. Знайдіть сто перший член послідовності (a_n) , якщо $a_1 = 0$, $a_2 = 1$, $a_{n+2} = a_{n+1} - a_n$.
3. Послідовність задано рекурентно: $a_1 = 7$, $a_2 = 25$, $a_{n+2} = 7a_{n+1} - 12a_n$. Доведіть, що всі члени цієї послідовності при діленні на 3 дають в остачі 1.
4. Послідовність задано рекурентно: $a_1 = 5$, $a_{n+1} = 4a_n - 3$. Доведіть, що всі члени цієї послідовності з непарними номерами діляться націло на 5.
5. Послідовність задано рекурентно: $a_1 = 8$, $a_{n+1} = 7a_n - 6$. Доведіть, що всі члени цієї послідовності при діленні на 3 дають в остачі 2.
6. Послідовність задано рекурентно: $a_1 = 7$, $a_2 = 29$, $a_{n+2} = 7a_{n+1} - 10a_n$. Доведіть, що $a_n = 2^n + 5^n$.
7. Послідовність задано рекурентно: $a_1 = 4$, $a_{n+1} = 2a_n - 3$. Доведіть, що $a_n = 2^{n-1} + 3$.
8. Знайдіть формулу n -го члена послідовності, заданої рекурентно:
 - 1) $a_1 = 1$, $a_{n+1} = 2a_n + 1$;
 - 2) $a_1 = \frac{1}{2}$, $a_{n+1} = \frac{1}{2 - a_n}$;
 - 3) $a_1 = 0$, $a_{n+1} = a_n + 2\sqrt{a_n + 1} + 1$.
9. Послідовність задано рекурентно: $a_1 = 1$, $a_{n+1} = a_n + 8n$. Доведіть, що будь-який член цієї послідовності є квадратом натурального числа.
10. Послідовність задано рекурентно: $a_1 = 1$, $a_{n+1} = a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 + n$. Доведіть, що в цій послідовності всі члени, крім першого, не є квадратами натуральних чисел.

VII. Рефлексія (2 хв)

Запропонуйте учням оцінити розуміння теми уроку балами від 1 до 10.

Мої враження від уроку

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Жахливі									Чудові

Назвіть дві речі, які вам сподобалися на уроці, й одну річ, яка вам не сподобалася, або у вас усе ще залишилися запитання.

- 1)
- 2)

?

.....

.....

Можливі теми проєктів

1. «Числа, що розповідають історію» – послідовності, які змінили науку.
2. Використання числових послідовностей у цифровому світі – програмування, шифрування, QR-коди тощо.
3. Конструювання власних числових послідовностей.

Список використаної літератури

- 1) Ключко І. Я. Державна підсумкова атестація. 9 клас. Математика: Алгебра / І. Я. Ключко. – Тернопіль: Навчальна книга – Богдан, 2022.
- 2) Мерзляк А. Г. Алгебра для загальноосвітніх навчальних закладів з поглибленим вивченням математики : підручн. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закладів / А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонський, М. С. Якір. – Х. : Гімназія, 2017.
- 3) Мерзляк А. Г. Алгебра і початки аналізу : проф. рівень : підручн. для 10 кл. закладів загальної середньої освіти / А. Г. Мерзляк, Д. А. Номіровський, В. Б. Полонський, М. С. Якір. Х. : Гімназія, 2018.
- 4) Мерзляк А. Г. Алгебра і початки аналізу : підручн. для 10 кл. з поглибленим вивченням математики / А. Г. Мерзляк, Д. А. Номіровський, В. Б. Полонський, М. С. Якір. – Х. : Гімназія, 2010.