

11

Тема 4. Числові послідовності. Границі числових послідовностей

Урок 11. Границя числової послідовності

РОБОЧИЙ АРКУШ

(моє ім'я)

I. Очікувані результати навчальних досягнень

На уроці ви навчитеся:

- 1) формулювати означення границі числової послідовності;
- 2) знаходити границі простих послідовностей, заданих формулою;
- 3) застосовувати означення границі для аналізу збіжності послідовності;
- 4) моделювати життєві ситуації, що описуються збіжними послідовностями;
- 5) робити висновки про збіжність або розбіжність послідовностей.

II. Повторення

1. Установіть відповідність між нерівністю (1–3) та множиною її розв'язків (А–Д).

Нерівність

1 $|-4x + 2| \geq 2$

2 $||x + 2| + 2| \geq 1$

3 $||x| - 6| \leq x$

Множина розв'язків нерівності

А $[3; +\infty)$

Б $(-\infty; +\infty)$

В $[0,2; 0,6]$

Г $(-\infty; 0] \cup [1; +\infty)$

Д $[0; 1]$

	А	Б	В	Г	Д
1	☐	☐	☐	☐	☐
2	☐	☐	☐	☐	☐
3	☐	☐	☐	☐	☐

2. Установіть відповідність між нерівністю (1–3) та рівносильною їй нерівністю (А–Д).

Нерівність

1 $|x| + |x - 1| \geq 1$

2 $|x^2| \leq |x|$

3 $|x^2 - 9| \geq x + 3$

Рівносильна нерівність

А $x^2 - 1 \leq 0$

Б $x^2 - 6x + 8 \geq 0$

В $x^2 + 1 > 0$

Г $x^2 + x - 1 \geq 0$

Д $x^2 - x - 3 \leq 0$

А Б В Г Д

1 ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

2 ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

3 ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

3. Установіть відповідність між нерівністю (1–3) та кількістю цілих розв'язків (А–Д) нерівності.

Нерівність

1 $|2x - 3| > |3x + 5|$

2 $|x + 1| + |x - 3| < 5$

3 $\left| 2 - \frac{1}{x - 4} \right| < 3$

Кількість цілих розв'язків нерівності

А три

Б чотири

В п'ять

Г сім

Д безліч

А Б В Г Д

1 ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

2 ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

3 ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

4. Розв'яжіть нерівність $|x - 6| > |x^2 - 5x + 9|$.

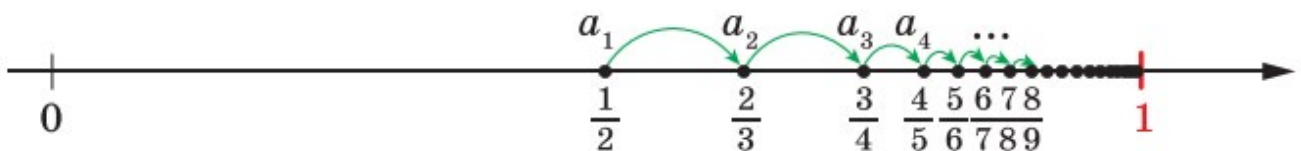
5. Розв'яжіть нерівність $|3x - 1| + |2x - 3| - |x + 5| < 2$ і вкажіть множину її цілих розв'язків.

III. Означення границі числової послідовності

Розглянемо послідовність (a_n) , задану формулою n -го члена $a_n = \frac{n}{n+1}$.

Випишемо кілька перших членів цієї послідовності: $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{6}{7}, \frac{7}{8}, \frac{8}{9}, \dots$

Можна помітити, що зі збільшенням номера n члени послідовності прямують до числа 1 (див. рисунок).



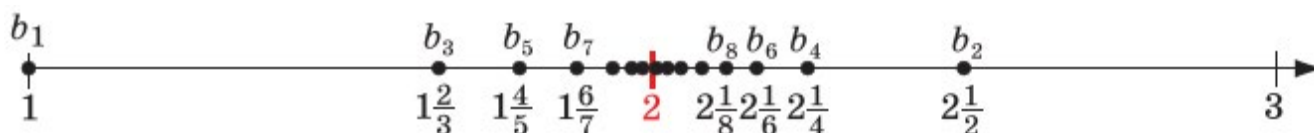
Інакше кажучи, значення виразу $|a_n - 1|$ зі збільшенням номера n стає все меншим і меншим. Маємо: $|a_n - 1| = \left| \frac{n}{n+1} - 1 \right| = \left| \frac{n - n - 1}{n+1} \right| = \left| \frac{-1}{n+1} \right| = \frac{1}{n+1}$. Таким чином, починаючи з деякого номера n_0 , значення виразу $|a_n - 1|$ стає меншим від будь-якого наперед заданого додатного числа ε (читають «епсilon»). Знайти n_0 можна, розв'язавши нерівність $\frac{1}{n+1} < \varepsilon$.

У такому разі говорять, що число 1 є границею послідовності (a_n) .

Розглянемо послідовність (b_n) , задану формулою n -го члена $b_n = 2 + \frac{(-1)^n}{n}$.

Випишемо кілька перших членів цієї послідовності: $1, 2\frac{1}{2}, 1\frac{2}{3}, 2\frac{1}{4}, 1\frac{4}{5}, 2\frac{1}{6}, 1\frac{6}{7}, \dots$

Зі збільшенням номера n члени послідовності прямують до числа 2 (див. рисунок).



Це означає, що для будь-якого додатного числа ε можна вказати такий номер n_0 , що для всіх $n \geq n_0$ виконується нерівність $|b_n - 2| < \varepsilon$.

Оскільки $|b_n - 2| = \left| 2 + \frac{(-1)^n}{n} - 2 \right| = \left| \frac{(-1)^n}{n} \right| = \frac{1}{n}$, то номер n_0 можна знайти, розв'язавши нерівність $\frac{1}{n} < \varepsilon$.

Означення. Число a називають **границею послідовності** (a_n) , якщо для будь-якого додатного числа ε існує такий номер n_0 , що для всіх $n \geq n_0$ виконується нерівність $|a_n - a| < \varepsilon$.

Записують: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ (тут *lim* — це початкові літери французького слова *limite* — границя).

Для прикладів, що розглядали вище, можна записати: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(2 + \frac{(-1)^n}{n} \right) = 2$.

Означення. Послідовність, яка має границю називають **збіжною**.

Означення. Послідовність, яка не має границі, називають **розбіжною**.

IV. Теорема про єдиність границі та символіка записів

Теорема. Числова послідовність може мати тільки одну границю.

У математиці часто використовують два спеціальних символи $\forall$ і $\exists$, які дають змогу значну кількість математичних тверджень записати в скороченому вигляді.

Символ $\forall$ (перевернута перша буква англійського слова *All* — кожний) називають квантором загальності. Він заміняє у словесних формулюваннях словосполучення: *для довільного, для будь-якого, для кожного*.

Символ $\exists$ (перевернута перша буква англійського слова *Exist* — існувати) називають квантором існування. Він заміняє у словесних формулюваннях слова: *існує, знайдеться, хоча б для одного*.

Означення границі послідовності містить слова: «для будь-якого», «існує», «для всіх». Тому, використовуючи квантори, його можна переписати так:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, |a_n - a| < \varepsilon.$$

Приклад 1. Нехай $a_n = \frac{3n-1}{n+2}$. За означенням границі доведіть, що $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 3$.

Розв'язання. Доведемо, що $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0: \left| \frac{3n-1}{n+2} - 3 \right| < \varepsilon$.

$$\text{Маємо: } \left| \frac{3n-1}{n+2} - 3 \right| = \left| \frac{3n-1-3n-6}{n+2} \right| = \left| \frac{-7}{n+2} \right| = \frac{7}{n+2}.$$

З'ясуємо, при яких $n \in \mathbb{N}$ виконується нерівність $\frac{7}{n+2} < \varepsilon$.

Переходимо до рівносильних нерівностей:

$$7 < n\varepsilon + 2\varepsilon; \quad n\varepsilon > 7 - 2\varepsilon; \quad n > \frac{7}{\varepsilon} - 2.$$

Візьмемо, наприклад, $n_0 = \left\lceil \frac{7}{\varepsilon} \right\rceil$. Тоді, якщо $n \geq n_0$, то $n > \frac{7}{\varepsilon} - 2$ і, переходячи до рів-

$$\text{носильної нерівності } n\varepsilon > 7 - 2\varepsilon; \quad 7 < n\varepsilon + 2\varepsilon; \quad \frac{7}{n+2} < \varepsilon; \quad \left| \frac{3n-1}{n+2} - 3 \right| < \varepsilon.$$

Тому $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n-1}{n+2} = 3$, що і треба було довести.

Приклад 2. Доведіть, що $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n-1}{2n+1} = \frac{3}{2}$.

Розв'язання. Нехай ε — довільне додатне число. Знайдемо номер n_0 такий, що для всіх $n \geq n_0$ виконується нерівність $\left| \frac{3n-1}{2n+1} - \frac{3}{2} \right| < \varepsilon$.

$$\text{Маємо: } \left| \frac{3n-1}{2n+1} - \frac{3}{2} \right| = \left| \frac{-5}{2(2n+1)} \right| = \frac{5}{2(2n+1)}.$$

З'ясуємо, при яких $n \in \mathbb{N}$ виконується нерівність $\frac{5}{2(2n+1)} < \varepsilon$.

Переходимо до рівносильних нерівностей:

$$5 < 4n\varepsilon + 2\varepsilon; \quad 4n\varepsilon > 5 - 2\varepsilon; \quad n > \frac{5}{4\varepsilon} - \frac{1}{2}.$$

Як номер n_0 візьмемо, наприклад, число $\left\lceil \frac{5}{4\varepsilon} \right\rceil + 1$. Тоді, якщо $n \geq n_0$, то $n > \frac{5}{4\varepsilon} - \frac{1}{2}$, і, переходячи до рівносильної нерівності $4n\varepsilon > 5 - 2\varepsilon$, а потім $5 < 4n\varepsilon + 2\varepsilon$, отримаємо врешті, що $\frac{5}{2(2n+1)} < \varepsilon$ і $\left| \frac{3n-1}{2n+1} - \frac{3}{2} \right| < \varepsilon$. Тому $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n-1}{2n+1} = \frac{3}{2}$, що і треба було довести.

V. Розв'язання практичної задачі

Як я вирішую певну проблему?

Задача. Прибуток від реалізації деякого проекту перевіряють кожні два тижні. Сума прибутку описується за формулою $a_n = \frac{4n^2 - 27n + 10}{n^2 + 19n - 63}$, де n — номер дня, а a_n — прибуток (у тис. доларів США). Доведіть, що $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 4$.

VI. Тренувальні вправи. Три рівні складності: А, В, С

Рівень А

1. Укажіть (без обґрунтування), яке число є границею послідовності (x_n) :
1) $x_n = 3 + \frac{1}{n}$; 2) $x_n = \frac{7}{\sqrt{n+1}}$; 3) $x_n = \frac{3 + \frac{1}{n}}{5 - \frac{2}{n}}$; 4) $x_n = \frac{\sin n}{n^5}$.
2. Укажіть (без обґрунтування), яке число є границею послідовності (x_n) :
1) $x_n = -\frac{1}{n} + 4$; 2) $x_n = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}}$; 3) $x_n = \cos n - \cos n$; 4) $x_n = \frac{1}{\sqrt{n}!}$.
3. Відомо, що деяка послідовність, членами якої є тільки цілі числа — збіжна. Що можна сказати про цю послідовність (обґрунтовувати відповідь необов'язково)?
4. Наведіть приклади трьох послідовностей, що збігаються до числа: 1) 3 ; 2) $-\sqrt{2}$.
5. Чи для кожного числа a існує послідовність, що збігається до a ?
6. Використовуючи квантори, запишіть:
1) означення зростаючої послідовності;
2) означення обмеженої знизу послідовності.
7. Знайдіть принаймні одне число n_0 таке, що для всіх $n \geq n_0$ виконується нерівність:
1) $\left| \frac{n-1}{n} - 1 \right| < \frac{1}{20}$; 2) $\left| \sqrt{\frac{n+1}{n}} - 1 \right| < 0,01$.
8. Знайдіть принаймні одне число n_0 таке, що для всіх $n \geq n_0$ виконується нерівність:
1) $\left| \frac{n-1}{n} - 1 \right| < 0,3$; 2) $\left| \frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{n}+1} - 2 \right| < \frac{1}{1000}$.
9. Доведіть, що:
1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = 1$; 2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n-1} = \frac{1}{2}$; 3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+5}{3n} = \frac{2}{3}$;
4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(3 + \frac{(-1)^n}{n} \right) = 3$; 5) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2+2}{5n^2-1} = \frac{3}{5}$.
10. Доведіть, що:
1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$; 2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+2}{n} = 2$; 3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n+1}{3n+5} = \frac{4}{3}$;
4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0$; 5) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}+1}{2\sqrt{n}+2} = \frac{1}{2}$.

Рівень В

1. Доведіть, що стаціонарна послідовність є збіжною. Чому дорівнює границя цієї послідовності?
2. Для довільного числа c і додатного раціонального r доведіть, що $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c}{n^r} = 0$.
3. Нехай при будь-якому $\varepsilon > 0$ в інтервалі $(a - \varepsilon; a + \varepsilon)$ міститься безліч членів послідовності (a_n) . Чи можна стверджувати, що $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$?

4. Нехай при будь-якому $\varepsilon > 0$ поза інтервалом $(a - \varepsilon; a + \varepsilon)$ міститься скінченна кількість членів послідовності (a_n) . Чи можна стверджувати, що $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$?
5. Нехай $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$. Чи можуть у цій послідовності:
 - 1) бути члени більші за 10000000;
 - 2) усі члени бути від'ємними;
 - 3) усі члени бути більшими за 10^{-100} ?
6. Зі збіжної послідовності викреслили всі члени, які містяться на парних місцях. Чи буде послідовність, що утворилася, збіжною?
7. У збіжній послідовності змінили 100 перших членів. Чи залишиться послідовність збіжною? Чи може змінитися границя послідовності?
8. Відомо, що границею послідовності (a_n) є число $\frac{1}{10}$. Доведіть, що, починаючи з деякого номера, кожний член послідовності (a_n) буде більшим за $\frac{1}{20}$.
9. Покажіть, що коли в означенні границі замість «для будь-якого $\varepsilon > 0$ » сказати «для будь-якого ε », то жодна послідовність не матиме границі.
10. Запропонуємо таке «означення» границі послідовності: число a називають границею послідовності (a_n) , якщо для будь-якого $\varepsilon \geq 0$ існує такий номер n_0 , що для всіх $n \geq n_0$ виконується нерівність $|a_n - a| \leq \varepsilon$. Які послідовності матимуть границю за такого «означення»?

Рівень С

1. Відомо, що $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 0$. Чи можна стверджувати, що $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$?
2. Відомо, що послідовність $(|a_n|)$ є збіжною. Чи можна стверджувати, що послідовність (a_n) також є збіжною?
3. Доведіть, що $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ тоді й тільки тоді, коли $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n - a| = 0$.
4. Чи можна стверджувати, що коли послідовність (a_n) є збіжною, то послідовність $(|a_n|)$ також є збіжною?
5. Послідовність $(\sin a_n)$ є збіжною. Чи можна стверджувати, що послідовність (a_n) також є збіжною?
6. Чи можна стверджувати, що коли послідовності (a_n) і (b_n) мають одну й ту саму границю, то цю саму границю має й послідовність $a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3, \dots$?
7. Доведіть, що послідовність із загальним членом $a_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$ є розбіжною.
8. Доведіть, що послідовність із загальним членом $a_n = n$ є розбіжною.
9. Нехай (x_n) — розбіжна послідовність. Чи можна стверджувати, що розбіжною є послідовність із загальним членом: 1) $y_n = (x_n)^n$; 2) $y_n = n^{x_n}$?
10. Нехай (x_n) — розбіжна послідовність. Чи можна стверджувати, що розбіжною є послідовність із загальним членом: 1) $y_n = \sqrt[n+1]{|x_n|}$; 2) $y_n = \frac{1}{n^{x_n}}$?

Рефлексія

Як я почуваюся після уроку?

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Жахливо									Чудово

Поради собі до наступного уроку

.

.

Можливі теми проєктів

1. Візуалізація границі через графіки.
2. Застосування границь у чисельних методах.

