

11

Тема 4. Числові послідовності. Границі числових послідовностей

Урок 11. Границя числової послідовності

План уроку

1. Означення границі числової послідовності.
2. Теорема про єдиність границі та символіка записів.

Очікувані результати навчальних досягнень

Учень/учениця:

здійснює перехід від абстрактного до конкретного та від конкретного до абстрактного [12 МАО 2.3.1–2 П];

визначає, яких даних недостатньо чи є надлишкові дані, під час розв'язання специфічної проблемної ситуації [12 МАО 3.1.2–1 П];

добирає доцільні математичні поняття, факти і послідовність дій для розв'язання проблемних ситуацій [12 МАО 4.2.1–1 П].

Дружні поради вчителю/вчительці до уроку

- 1) Сформулюйте учням/ученицям мотиваційні запитання щодо матеріалу уроку.
- 2) Запропонуйте учням/ученицям, на ваш вибір, завдання на повторення вивченого.
- 3) Сформулюйте практичну задачу (без розв'язання). Розв'язання пропонуємо у вигляді групової роботи наприкінці уроку.
- 4) Теорію подавайте стисло, акцентуйте увагу (коли можливо) на її практичному застосуванні.
- 5) До теоретичних тверджень наведено ілюстративні задачі. Обирайте ілюстративні задачі на власний розсуд.
- 6) Увесь запропонований матеріал неможливо подати в часових вимірах одного уроку, тому обирайте кількість матеріалу на власний розсуд.
- 7) Заплануйте розв'язання практичної задачі. Об'єднайте учнів/учениць у кілька груп. Під час розв'язання задачі групами важливо формувати комунікаційні навички, знаходити

математичного партнера, з яким під силу розв'язати задачу, інтегрувати здобуті знання у розв'язання практичних задач.

8) Пропонуйте учням/ученицям самотужки або в групах розв'язувати тренувальні завдання за трьома рівнями складності, на вибір учня/учениці. Формуйте навички розв'язання прикладів та задач і навчайте учнів/учениць самостійної роботи над завданнями.

9) Мотивуйте учнів/учениць до проєктної діяльності. Запропонуйте учням/ученицям обрати теми для індивідуальних (групових) проєктів.

10) Можливі теми для створення проєктів запропоновані.

11) Запропонуйте учням/ученицям дати відповіді на запитання для рефлексії.

I. Організаційна частина (2 хв)

Мотиваційні запитання

1) Уявіть, що рухаючись зі школи додому, ви долаєте половину шляху, потім половину від решти, далі знову половину від решти і т.ін. Чи зможете ви дістатись додому?

2) Ви відкладаєте гроші, кожного місяця відкладаючи половину від попередньої суми. Чи можна сказати, що накопичена сума має «межу»?

3) Якщо температура гарячої води охолоджується поступово, чи можна передбачити, до якої температури вона наблизиться?

II. Повторення (4–5 хв)

1. Установіть відповідність між нерівністю (1–3) та множиною її розв'язків (А–Д).

Нерівність

1 $|-4x + 2| \geq 2$

2 $||x + 2| + 2| \geq 1$

3 $||x| - 6| \leq x$

Множина розв'язків нерівності

А $[3; +\infty)$

Б $(-\infty; +\infty)$

В $[0, 2; 0, 6]$

Г $(-\infty; 0] \cup [1; +\infty)$

Д $[0; 1]$

	А	Б	В	Г	Д
1	☐	☐	☐	☐	☐
2	☐	☐	☐	☐	☐
3	☐	☐	☐	☐	☐

Відповідь. 1 – Г, 2 – Б, 3 – А.

2. Установіть відповідність між нерівністю (1–3) та рівносильною їй нерівністю (А–Д).

Нерівність

1 $|x| + |x - 1| \geq 1$

2 $|x^2| \leq |x|$

3 $|x^2 - 9| \geq x + 3$

Рівносильна нерівність

А $x^2 - 1 \leq 0$

Б $x^2 - 6x + 8 \geq 0$

В $x^2 + 1 > 0$

Г $x^2 + x - 1 \geq 0$

Д $x^2 - x - 3 \leq 0$

	А	Б	В	Г	Д
1	☐	☐	☐	☐	☐
2	☐	☐	☐	☐	☐
3	☐	☐	☐	☐	☐

Відповідь. 1 – В, 2 – А, 3 – Б.

3. Установіть відповідність між нерівністю (1–3) та кількістю цілих розв’язків (А–Д) нерівності.

Нерівність

1 $|2x - 3| > |3x + 5|$

2 $|x + 1| + |x - 3| < 5$

3 $\left|2 - \frac{1}{x-4}\right| < 3$

Кількість цілих розв’язків нерівності

А три

Б чотири

В п’ять

Г сім

Д безліч

	А	Б	В	Г	Д
1	☐	☐	☐	☐	☐
2	☐	☐	☐	☐	☐
3	☐	☐	☐	☐	☐

Відповідь. 1 – Г, 2 – В, 3 – Д.

4. Розв’яжіть нерівність $|x - 6| > |x^2 - 5x + 9|$.

Відповідь. $(-\infty; +\infty)$.

5. Розв’яжіть нерівність $|3x - 1| + |2x - 3| - |x + 5| < 2$ і вкажіть множину її цілих розв’язків.

Відповідь. $\{1; 2\}$.

Як я вирішую певну проблему?

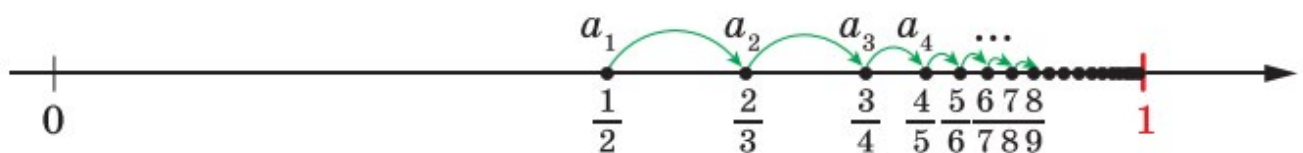
Задача. Прибуток від реалізації деякого проекту перевіряють кожні два тижні. Сума прибутку описується за формулою $a_n = \frac{4n^2 - 27n + 10}{n^2 + 19n - 63}$, де n — номер дня, а a_n — прибуток (у тис. доларів США). Доведіть, що $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 4$.

III. Означення границі числової послідовності

Розглянемо послідовність (a_n) , задану формулою n -го члена $a_n = \frac{n}{n+1}$.

Випишемо кілька перших членів цієї послідовності: $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{6}{7}, \frac{7}{8}, \frac{8}{9}, \dots$

Можна помітити, що зі збільшенням номера n члени послідовності прямують до числа 1 (див. рисунок).



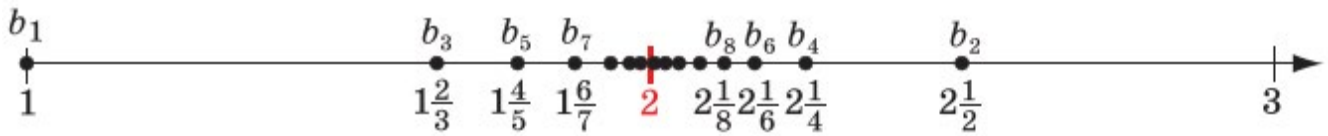
Інакше кажучи, значення виразу $|a_n - 1|$ зі збільшенням номера n стає все меншим і меншим. Маємо: $|a_n - 1| = \left| \frac{n}{n+1} - 1 \right| = \left| \frac{n - n - 1}{n+1} \right| = \left| \frac{-1}{n+1} \right| = \frac{1}{n+1}$. Таким чином, починаючи з деякого номера n_0 , значення виразу $|a_n - 1|$ стає меншим від будь-якого наперед заданого додатного числа ε (читають «епсилон»). Знайти n_0 можна, розв’язавши нерівність $\frac{1}{n+1} < \varepsilon$.

У такому разі говорять, що число 1 є границею послідовності (a_n) .

Розглянемо послідовність (b_n) , задану формулою n -го члена $b_n = 2 + \frac{(-1)^n}{n}$.

Випишемо кілька перших членів цієї послідовності: $1, 2\frac{1}{2}, 1\frac{2}{3}, 2\frac{1}{4}, 1\frac{4}{5}, 2\frac{1}{6}, 1\frac{6}{7}, \dots$

Зі збільшенням номера n члени послідовності прямують до числа 2 (див. рисунок).



Це означає, що для будь-якого додатного числа ε можна вказати такий номер n_0 , що для всіх $n \geq n_0$ виконується нерівність $|b_n - 2| < \varepsilon$.

Оскільки $|b_n - 2| = \left| 2 + \frac{(-1)^n}{n} - 2 \right| = \left| \frac{(-1)^n}{n} \right| = \frac{1}{n}$, то номер n_0 можна знайти, розв'язавши нерівність $\frac{1}{n} < \varepsilon$.

Означення. Число a називають **границею послідовності** (a_n) , якщо для будь-якого додатного числа ε існує такий номер n_0 , що для всіх $n \geq n_0$ виконується нерівність $|a_n - a| < \varepsilon$.

Записують: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ (тут *lim* — це початкові літери французького слова *limite* — границя).

Для прикладів, що розглядали вище, можна записати: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(2 + \frac{(-1)^n}{n} \right) = 2$.

Означення. Послідовність, яка має границю називають **збіжною**.

Означення. Послідовність, яка не має границі, називають **розбіжною**.

IV. Теорема про єдиність границі та символіка записів

Теорема. Числова послідовність може мати тільки одну границю.

У математиці часто використовують два спеціальних символи $\forall$ і $\exists$, які дають змогу значну кількість математичних тверджень записати в скороченому вигляді.

Символ $\forall$ (перевернута перша буква англійського слова *All* — кожний) називають квантором загальності. Він заміняє у словесних формулюваннях словосполучення: *для довільного, для будь-якого, для кожного*.

Символ $\exists$ (перевернута перша буква англійського слова *Exist* — існувати) називають квантором існування. Він заміняє у словесних формулюваннях слова: *існує, знайдеться, хоча б для одного*.

Означення границі послідовності містить слова: «для будь-якого», «існує», «для всіх». Тому, використовуючи квантори, його можна переписати так:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, |a_n - a| < \varepsilon.$$

Ілюстративні приклади

- 6.** Нехай $a_n = \frac{3n-1}{n+2}$. За означенням границі доведіть, що $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 3$.

Розв'язання. Доведемо, що $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0: \left| \frac{3n-1}{n+2} - 3 \right| < \varepsilon$.

$$\text{Маємо: } \left| \frac{3n-1}{n+2} - 3 \right| = \left| \frac{3n-1-3n-6}{n+2} \right| = \left| \frac{-7}{n+2} \right| = \frac{7}{n+2}.$$

З'ясуємо, при яких $n \in \mathbb{N}$ виконується нерівність $\frac{7}{n+2} < \varepsilon$.

Переходимо до рівносильних нерівностей:

$$7 < n\varepsilon + 2\varepsilon; \quad n\varepsilon > 7 - 2\varepsilon; \quad n > \frac{7}{\varepsilon} - 2.$$

Візьмемо, наприклад, $n_0 = \left\lceil \frac{7}{\varepsilon} \right\rceil$. Тоді, якщо $n \geq n_0$, то $n > \frac{7}{\varepsilon} - 2$ і, переходячи до рів-

носильної нерівності $n\varepsilon > 7 - 2\varepsilon; 7 < n\varepsilon + 2\varepsilon; \frac{7}{n+2} < \varepsilon; \left| \frac{3n-1}{n+2} - 3 \right| < \varepsilon$.

Тому $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n-1}{n+2} = 3$, що і треба було довести.

- 7.** Доведіть, що $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n-1}{2n+1} = \frac{3}{2}$.

Розв'язання. Нехай ε — довільне додатне число. Знайдемо номер n_0 такий, що для

всіх $n \geq n_0$ виконується нерівність $\left| \frac{3n-1}{2n+1} - \frac{3}{2} \right| < \varepsilon$.

$$\text{Маємо: } \left| \frac{3n-1}{2n+1} - \frac{3}{2} \right| = \left| \frac{-5}{2(2n+1)} \right| = \frac{5}{2(2n+1)}.$$

З'ясуємо, при яких $n \in \mathbb{N}$ виконується нерівність $\frac{5}{2(2n+1)} < \varepsilon$.

Переходимо до рівносильних нерівностей:

$$5 < 4n\varepsilon + 2\varepsilon; \quad 4n\varepsilon > 5 - 2\varepsilon; \quad n > \frac{5}{4\varepsilon} - \frac{1}{2}.$$

Як номер n_0 візьмемо, наприклад, число $\left\lceil \frac{5}{4\varepsilon} \right\rceil + 1$. Тоді, якщо $n \geq n_0$, то $n > \frac{5}{4\varepsilon} - \frac{1}{2}$,

і, переходячи до рівносильної нерівності $4n\varepsilon > 5 - 2\varepsilon$, а потім $5 < 4n\varepsilon + 2\varepsilon$, отрима-

ємо врешті, що $\frac{5}{2(2n+1)} < \varepsilon$ і $\left| \frac{3n-1}{2n+1} - \frac{3}{2} \right| < \varepsilon$. Тому $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n-1}{2n+1} = \frac{3}{2}$, що і треба було

довести.

- 8.** Нехай $a_n = \frac{n^2-3n+1}{2n^2+n+2}$. За означенням границі доведіть, що $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{1}{2}$.

Розв'язання. Розглянемо вираз:

$$\left| a_n - \frac{1}{2} \right| = \left| \frac{n^2-3n+1}{2n^2+n+2} - \frac{1}{2} \right| = \left| \frac{-7n}{2(2n^2+n+2)} \right| = \frac{7n}{2(2n^2+n+2)}.$$

Для кожного $n \in N$ маємо: $\left| a_n - \frac{1}{2} \right| < \frac{8n}{2(2n^2 + n + 2)} < \frac{4n}{2n^2} = \frac{2}{n}$.

Отже, якщо $\frac{2}{n} < \varepsilon$, то і $\left| a_n - \frac{1}{2} \right| < \varepsilon \cdot \frac{2}{n} < \varepsilon$ при $n > \frac{2}{\varepsilon}$.

Виберемо $n_0 = \left\lceil \frac{2}{\varepsilon} \right\rceil + 1$. При $n > n_0$ маємо:

$n > \left\lceil \frac{2}{\varepsilon} \right\rceil + 1 > \frac{2}{\varepsilon}$ і $\left| a_n - \frac{1}{2} \right| < \varepsilon$, тобто $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{1}{2}$.

9. Доведіть, що послідовність (a_n) , яку задано формулою $a_n = (-1)^n$, є розбіжною.

Розв'язання. Припустимо, що послідовність (a_n) є збіжною і $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$. Тоді для

$\varepsilon = \frac{1}{2}$ існує номер n_0 такий, що для всіх $n \geq n_0$ виконується нерівність $|a_n - a| < \frac{1}{2}$.

Отже, при $n = 2n_0$ і $n = 2n_0 + 1$ одночасно мають виконуватися дві нерівності:

$|a_{2n_0} - a| < \frac{1}{2}$ і $|a_{2n_0+1} - a| < \frac{1}{2}$, тобто $|1 - a| < \frac{1}{2}$ і $|-1 - a| < \frac{1}{2}$.

Розглянемо систему:
$$\begin{cases} |1 - a| < \frac{1}{2}, & \begin{cases} -\frac{1}{2} < 1 - a < \frac{1}{2}, \\ \frac{1}{2} < a < 2\frac{1}{2}, \end{cases} \\ |1 + a| < \frac{1}{2}; & \begin{cases} -\frac{1}{2} < 1 + a < \frac{1}{2}; \\ -1\frac{1}{2} < a < -\frac{1}{2}. \end{cases} \end{cases}$$

Отже, отримана система не має розв'язків. Отримали суперечність.

V. Розв'язання практичної задачі. Групова активність (8–10 хв)

Як я вирішую певну проблему?

Задача. Прибуток від реалізації деякого проєкту перевіряють кожні два тижні. Сума

прибутку описується за формулою $a_n = \frac{4n^2 - 27n + 10}{n^2 + 19n - 63}$, де n — номер дня, а a_n — прибуток (у тис. доларів США). Доведіть, що $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 4$.

Розв'язання. $|a_n - 4| = \left| \frac{4n^2 - 27n + 10}{n^2 + 19n - 63} - 4 \right| = \left| \frac{-103n + 262}{n^2 + 19n - 63} \right| = \frac{|-103n + 262|}{|n^2 + 19n - 63|}$.

Помітимо, що $|a_n - 4| \leq \frac{|-103n| + |262|}{|n^2 + (19n - 63)|} < \frac{103n + 309}{|n^2 + (19n - 63)|}$.

При $n > 3$: $19n - 63 > 0$ і $n^2 + (19n - 63) > n^2$. Отже, при $n > 3$: $|a_n - 4| < \frac{103(n + 3)}{n^2}$.

При $n > 4$: $n + 3 < 2n$. Отже, при $n > 3$: $|a_n - 4| < \frac{103 \cdot 2n}{n^2} = \frac{206}{n}$.

Для визначення числа $n_0 \in N$ маємо систему
$$\begin{cases} n_0 > 3, \\ \frac{206}{n_0} < \varepsilon; \end{cases} \text{ або } \begin{cases} n_0 > 3, \\ n_0 > \frac{206}{\varepsilon}. \end{cases}$$

Виберемо $n_0 = \left\lceil \frac{206}{\varepsilon} \right\rceil + 4$. При $n > n_0$ маємо: $|a_n - 4| < \varepsilon$, тобто $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 4$, що і треба було довести.

VI. Тренувальні вправи. Три рівні складності: А, В, С (8–10 хв)

Рівень А

- Укажіть (без обґрунтування), яке число є границею послідовності (x_n) :
 1) $x_n = 3 + \frac{1}{n}$; 2) $x_n = \frac{7}{\sqrt{n+1}}$; 3) $x_n = \frac{3 + \frac{1}{n}}{5 - \frac{2}{n}}$; 4) $x_n = \frac{\sin n}{n^5}$.
- Укажіть (без обґрунтування), яке число є границею послідовності (x_n) :
 1) $x_n = -\frac{1}{n} + 4$; 2) $x_n = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}}$; 3) $x_n = \cos n - \cos n$; 4) $x_n = \frac{1}{\sqrt{n!}}$.
- Відомо, що деяка послідовність, членами якої є тільки цілі числа — збіжна. Що можна сказати про цю послідовність (обґрунтовувати відповідь необов'язково)?
- Наведіть приклади трьох послідовностей, що збігаються до числа: 1) 3 ; 2) $-\sqrt{2}$.
- Чи для кожного числа a існує послідовність, що збігається до a ?
- Використовуючи квантори, запишіть:
 1) означення зростаючої послідовності;
 2) означення обмеженої знизу послідовності.
- Знайдіть принаймні одне число n_0 таке, що для всіх $n \geq n_0$ виконується нерівність:
 1) $\left| \frac{n-1}{n} - 1 \right| < \frac{1}{20}$; 2) $\left| \sqrt{\frac{n+1}{n}} - 1 \right| < 0,01$.
- Знайдіть принаймні одне число n_0 таке, що для всіх $n \geq n_0$ виконується нерівність:
 1) $\left| \frac{n-1}{n} - 1 \right| < 0,3$; 2) $\left| \frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} - 2 \right| < \frac{1}{1000}$.
- Доведіть, що:
 1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = 1$; 2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n-1} = \frac{1}{2}$; 3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+5}{3n} = \frac{2}{3}$;
 4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(3 + \frac{(-1)^n}{n} \right) = 3$; 5) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2+2}{5n^2-1} = \frac{3}{5}$.
- Доведіть, що:
 1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$; 2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+2}{n} = 2$; 3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n+1}{3n+5} = \frac{4}{3}$;
 4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0$; 5) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}+1}{2\sqrt{n}+2} = \frac{1}{2}$.

Рівень В

- Доведіть, що стаціонарна послідовність є збіжною. Чому дорівнює границя цієї послідовності?

2. Для довільного числа c і додатного раціонального r доведіть, що $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c}{n^r} = 0$.
3. Нехай при будь-якому $\varepsilon > 0$ в інтервалі $(a - \varepsilon; a + \varepsilon)$ міститься безліч членів послідовності (a_n) . Чи можна стверджувати, що $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$?
4. Нехай при будь-якому $\varepsilon > 0$ поза інтервалом $(a - \varepsilon; a + \varepsilon)$ міститься скінченна кількість членів послідовності (a_n) . Чи можна стверджувати, що $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$?
5. Нехай $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$. Чи можуть у цій послідовності:
 - 1) бути члени більші за 1000000;
 - 2) усі члени бути від'ємними;
 - 3) усі члени бути більшими за 10^{-100} ?
6. Зі збіжної послідовності викреслили всі члени, які містяться на парних місцях. Чи буде послідовність, що утворилася, збіжною?
7. У збіжній послідовності змінили 100 перших членів. Чи залишиться послідовність збіжною? Чи може змінитися границя послідовності?
8. Відомо, що границею послідовності (a_n) є число $\frac{1}{10}$. Доведіть, що, починаючи з деякого номера, кожний член послідовності (a_n) буде більшим за $\frac{1}{20}$.
9. Покажіть, що коли в означенні границі замість «для будь-якого $\varepsilon > 0$ » сказати «для будь-якого ε », то жодна послідовність не матиме границі.
10. Запропонуємо таке «означення» границі послідовності: число a називають границею послідовності (a_n) , якщо для будь-якого $\varepsilon \geq 0$ існує такий номер n_0 , що для всіх $n \geq n_0$ виконується нерівність $|a_n - a| \leq \varepsilon$. Які послідовності матимуть границю за такого «означення»?

Рівень С

1. Відомо, що $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 0$. Чи можна стверджувати, що $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$?
2. Відомо, що послідовність $(|a_n|)$ є збіжною. Чи можна стверджувати, що послідовність (a_n) також є збіжною?
3. Доведіть, що $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ тоді й тільки тоді, коли $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n - a| = 0$.
4. Чи можна стверджувати, що коли послідовність (a_n) є збіжною, то послідовність $(|a_n|)$ також є збіжною?
5. Послідовність $(\sin a_n)$ є збіжною. Чи можна стверджувати, що послідовність (a_n) також є збіжною?
6. Чи можна стверджувати, що коли послідовності (a_n) і (b_n) мають одну й ту саму границю, то цю саму границю має й послідовність $a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3, \dots$?
7. Доведіть, що послідовність із загальним членом $a_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$ є розбіжною.
8. Доведіть, що послідовність із загальним членом $a_n = n$ є розбіжною.
9. Нехай (x_n) — розбіжна послідовність. Чи можна стверджувати, що розбіжною є послідовність із загальним членом: 1) $y_n = (x_n)^n$; 2) $y_n = n^{x_n}$?

- 10.** Нехай (x_n) — розбіжна послідовність. Чи можна стверджувати, що розбіжною є послідовність із загальним членом: 1) $y_n = \sqrt[n+1]{|x_n|}$; 2) $y_n = \frac{1}{n^{x_n}}$?

VII. Рефлексія (1 хв)

Як я почуваюся після уроку?

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Жахливо									Чудово

Поради собі до наступного уроку

.....

.....

Можливі теми проєктів

- 1.** Візуалізація границі через графіки.
- 2.** Застосування границь у чисельних методах.

Список використаної літератури

- 1) Мерзляк А. Г. Алгебра і початки аналізу : початок вивчення на поглиб. рівні з 8 кл., проф. рівень : підруч. для 10 кл. закладів загальної середньої освіти / А. Г. Мерзляк, Д. А. Номіровський, В. Б. Полонський, М. С. Якір. — Х. : Гімназія, 2018.
- 2) Мерзляк А. Г. Вчимося розв'язувати задачі з початків аналізу (навчально-методичний посібник) / А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонський, М. М. Рабінович, М. С. Якір. — Т.: Підручники & посібники, 2003.
- 3) Славич Л.Є. Матеріали до теми «Границя та неперервність». Алгебра і початки аналізу. 10 клас. / Л. Є. Славич, Н. Л. Смик // Науково-методичний журнал «Математика в школах України» — 2007 рік, №32 (188).
- 4) Ушаков Р. П. Границя числової послідовності в задачах. / Р. П. Ушаков // Науково-методичний журнал «Математика в школах України» — 2007 рік, №31(187).