

Тема 4.

Числові послідовності.

Границі числових послідовностей

Урок 12. Границя числової послідовності

РОБОЧИЙ АРКУШ

(моє ім'я)

I. Очікувані результати навчальних досягнень

На уроці ви навчитеся:

- 1) пояснювати, що таке числова послідовність;
- 2) формулювати означення границі числової послідовності;
- 3) визначати, чи має послідовність границю;
- 4) знаходити границі простих числових послідовностей;
- 5) робити висновки на основі обчислень;
- 6) застосовувати знання про границі для розв'язування вправ.

II. Повторення

1. Запишіть перші 5 членів послідовності, заданої формулою $a_n = 2n - 3$.
2. Знайдіть перший від'ємний член арифметичної прогресії 7,2; 6,6; 6; ...
3. Число 96 є членом геометричної прогресії $\frac{3}{8}; \frac{3}{4}; \frac{3}{2}; \dots$. Знайдіть номер цього члена.
4. Знайдіть суму всіх парних двоцифрових чисел.
5. Знайдіть суму всіх трицифрових чисел, кратних 9, які не більші за 1000.

III. Підпоследовності

Означення. Последовність (b_n) називають **підпоследовністю** последовності (a_n) , якщо $\forall k \in \mathbb{N} \exists n_k \in \mathbb{N}$ таке, що $b_k = a_{n_k}$, при чому $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$

Підпоследовність последовності (a_n) зазвичай позначають символом (a_{n_k}) .

Теорема. Якщо последовність має границю, то будь-яка її підпоследовність має ту саму границю.

Теорема. Якщо з последовності можна виділити дві підпоследовності, які мають різні границі, то дана последовність границі не має.

IV. Розв'язування вправ різного рівня складності

Для успішного розв'язування задач дотримуйтеся порад:

- 1) добре розберіться в означенні;
- 2) візуалізуйте последовність на графіку для того, щоб краще побачити «наближення» до границі;
- 3) оцінюйте крайні випадки;
- 4) перевіряйте правильність кроків;
- 5) аналізуйте підпоследовності особливо у випадках якщо последовності періодичні;
- 6) починайте із простих прикладів;
- 7) записуйте кроки по порядку;
- 8) будьте впевненими в собі.

Приклад 1. Последовність задано формулою загального члена $a_n = \frac{n-1}{2n+1}$. Для задано-

го числа $\varepsilon = 0,03$ укажіть такий номер n_0 , що для всіх $n > n_0$ виконується нерівність $\left| a_n - \frac{1}{2} \right| < \varepsilon$.

Розв'язання. Маємо $\left| a_n - \frac{1}{2} \right| = \left| \frac{n-1}{2n+1} - \frac{1}{2} \right| = \left| \frac{-3}{2(2n+1)} \right| = \frac{3}{2(2n+1)}$.

З'ясуємо, при яких n виконується нерівність $\frac{3}{2(2n+1)} < \frac{3}{100}$. Ця нерівність рівно-

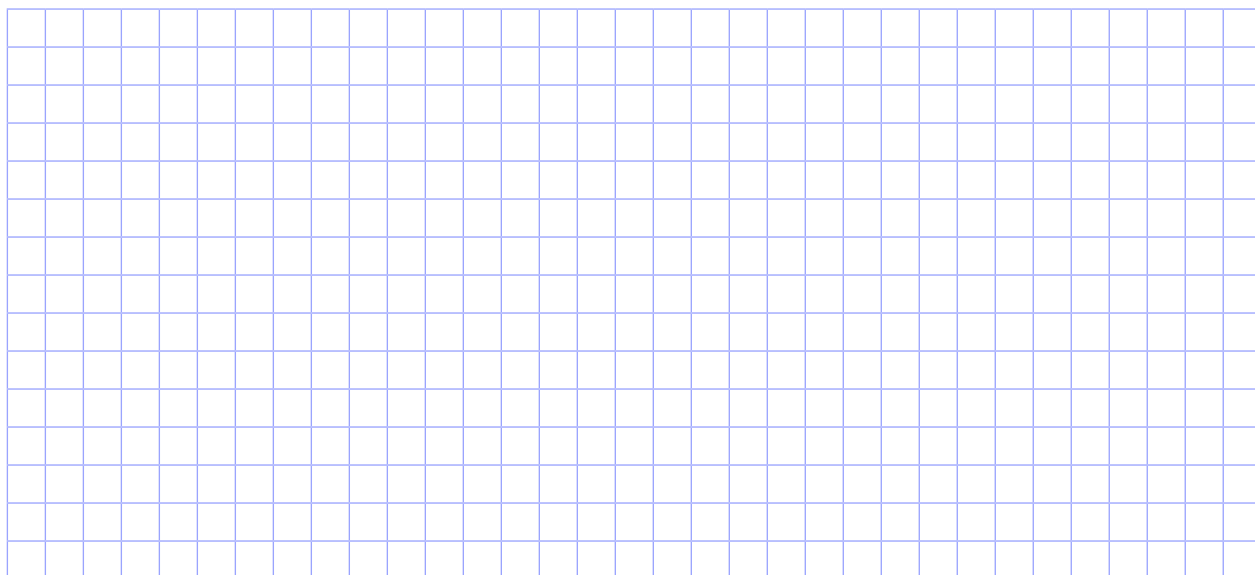
сильна таким нерівностям: $\frac{1}{2n+1} < \frac{1}{50}$, $2n+1 > 50$, $n > 24,5$. Візьмемо $n_0 = 25$. Зро-

зуміло, що якщо $n > n_0$, то $n > 24,5$, а значить, виконується нерівність

$$\frac{3}{2(2n+1)} < \frac{3}{100}, \text{ тобто } \left| a_n - \frac{1}{2} \right| < \varepsilon.$$

Відповідь. $n_0 = 25$.

Приклад 2. Доведіть, за допомогою означення границі послідовності, що $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n-1}{2n+1} = \frac{3}{2}$.



V. Тренувальні вправи. Три рівні складності: А, В, С

Рівень А

1. Розв'яжіть нерівність в натуральних числах для $\varepsilon = \frac{1}{10}$, $\varepsilon = \frac{1}{100}$:
 - 1) $\frac{1}{n} < \varepsilon$;
 - 2) $\frac{1}{n+1} < \varepsilon$;
 - 3) $\frac{1}{n^3} < \varepsilon$.
2. Доведіть, що для будь-якого $\varepsilon > 0$ знайдеться натуральне n_0 , таке, що для всіх $n > n_0$ виконуються нерівності 1) – 3). З'ясуйте, скільки існує таких натуральних n_0 .
 - 1) $\frac{1}{n} < \varepsilon$;
 - 2) $\frac{1}{n+1} < \varepsilon$;
 - 3) $\frac{1}{n^3} < \varepsilon$.
3. Доведіть, що:
 - 1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n-1} = 0$;
 - 2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^3} = 0$.
4. Доведіть, що $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2+2} = 0$.
5. Доведіть, що $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n+3}} = 0$.
6. Послідовність задано формулою загального члена $a_n = \frac{n+1}{n}$. Для заданого числа ε укажіть такий номер n_0 , що для всіх $n > n_0$ виконується нерівність $|a_n - 1| < \varepsilon$:
 - 1) $\varepsilon = \frac{1}{2}$;
 - 2) $\varepsilon = 0,1$;
 - 3) $\varepsilon = 0,01$.

Рівень В

- 1.** Послідовність задано формулою загального члена $a_n = \frac{n}{n+1}$. Для заданого числа ε укажіть такий номер n_0 , що для всіх $n > n_0$ виконується нерівність $|a_n - 1| < \varepsilon$:
- 1) $\varepsilon = \frac{1}{3}$; 2) $\varepsilon = \frac{1}{4}$; 3) $\varepsilon = 0,001$.
- 2.** Послідовність задано формулою загального члена $a_n = 3 + \frac{(-1)^{n-1}}{n}$. Для заданого числа ε укажіть такий номер n_0 , що для всіх $n > n_0$ виконується нерівність $|a_n - 3| < \varepsilon$:
- 1) $\varepsilon = 0,05$; 2) $\varepsilon = 0,08$; 3) $\varepsilon = 0,004$.
- 3.** Послідовність задано формулою загального члена $a_n = \frac{n-1}{2n+1}$. Для заданого числа ε укажіть такий номер n_0 , що для всіх $n > n_0$ виконується нерівність $\left|a_n - \frac{1}{2}\right| < \varepsilon$:
- 1) $\varepsilon = 0,2$; 2) $\varepsilon = 0,005$.
- 4.** Доведіть, що послідовність не має границі:
- 1) $x_n = (-1)^n$; 2) $x_n = \begin{cases} 2^n, & n \div 2, \\ \frac{1}{n}, & n \nmid 2. \end{cases}$
- 5.** Доведіть, що послідовність $x_n = \sin n$ не має границі.

Рівень С

- 1.** За означенням границі доведіть, що:
- 1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1$; 2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$; 3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-1}{n+1} = 2$; 4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} = 0$.
- 2.** За означенням границі доведіть, що:
- 1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-n+2}{2n-1} = -\frac{1}{2}$; 2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2+n-1}{2n^2+2n-3} = \frac{1}{2}$; 3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2+2n-2}{n^2+n+1} = 3$.
- 3.** Якщо $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 2$, то доведіть твердження:
- 1) $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + 3) = 5$; 2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n + 2}{x_n + 1} = \frac{4}{3}$; 3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{x_n} = \sqrt{2}$; 4) $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n^2 = 4$.
- 4.** Дана послідовність (x_n) така, що послідовність $(|x_n|)$ збіжна. Чи правильно, що послідовність (x_n) обов'язково збіжна?
- 5.** Дана послідовність (x_n) така, що послідовність $y_n = \sin x_n$ збіжна. Чи правильно, що послідовність (x_n) обов'язково збіжна?
- 6.** Чи можна члени натурального ряду переставити так, щоб отримана в результаті послідовність була збіжною?

Рефлексія

- 1) Сьогодні я дізнався/дізналась, що
.....
.....
- 2) Цей урок допоміг мені зрозуміти, що
.....
.....
- 3) Під час уроку я зрозумів/зрозуміла, що вже вмію
.....
.....
- 4) Найскладнішим для мене було
.....
.....
- 5) Тепер я впевнений/упевнена у своїй здатності
.....
.....
- 6) Найбільше мені сподобалося
.....
.....

Можливі теми проєктів

1. Комп'ютерні моделі числових послідовностей.
2. Графічне дослідження границі числової послідовності.

