

Тема 4.

Числові послідовності.

Границі числових послідовностей

Урок 12. Границя числової послідовності

План уроку

1. Підпослідовності.
2. Розв'язування вправ різного рівня складності.

Очікувані результати навчальних досягнень

Учень/учениця:

здійснює перехід від абстрактного до конкретного та від конкретного до абстрактного [12 МАО 2.3.1–2 П];

визначає, яких даних недостатньо чи є надлишкові дані, під час розв'язання специфічної проблемної ситуації [12 МАО 3.1.2–1 П];

добирає доцільні математичні поняття, факти і послідовність дій для розв'язання проблемних ситуацій [12 МАО 4.2.1–1 П].

Дружні поради вчителю/вчительці до уроку

- 1) Сформулюйте учням/ученицям мотиваційні запитання щодо матеріалу уроку.
- 2) Запропонуйте учням/ученицям, на ваш вибір, завдання на повторення вивченого.
- 3) Сформулюйте практичну задачу (без розв'язання). Розв'язання пропонуємо у вигляді групової роботи наприкінці уроку.
- 4) Теорію подавайте стисло, акцентуйте увагу (коли можливо) на її практичному застосуванні.
- 5) До теоретичних тверджень наведено ілюстративні задачі. Обирайте ілюстративні задачі на власний розсуд.
- 6) Увесь запропонований матеріал неможливо подати в часових вимірах одного уроку, тому обирайте кількість матеріалу на власний розсуд.
- 7) Заплануйте розв'язання практичної задачі. Об'єднайте учнів/учениць у кілька груп. Під час розв'язання задачі групами важливо формувати комунікаційні навички, знаходити

математичного партнера, з яким під силу розв'язати задачу, інтегрувати здобуті знання у розв'язання практичних задач.

8) Пропонуйте учням/ученицям самотужки або в групах розв'язувати тренувальні завдання за трьома рівнями складності, на вибір учня/учениці. Формуйте навички розв'язання прикладів та задач і навчайте учнів/учениць самостійної роботи над завданнями.

9) Мотивуйте учнів/учениць до проектної діяльності. Запропонуйте учням/ученицям обрати теми для індивідуальних (групових) проєктів. Створення проєктів та їхній захист можуть бути альтернативою контрольної роботи з теми.

10) Можливі теми для створення проєктів запропоновані.

11) Запропонуйте учням/ученицям дати відповіді на запитання для рефлексії.

I. Організаційна частина (2 хв)

Мотиваційні запитання

1) Що відбувається з числом, якщо ми нескінченно багато разів ділимо його на 2?

2) Чи завжди послідовність із зростаючими членами прямує до нескінченності?

3) Як ви думаєте, навіщо математикам поняття границі?

II. Повторення (4–5 хв)

1. Запишіть перші 5 членів послідовності, заданої формулою $a_n = 2n - 3$.
Відповідь. $-1; 1; 3; 5; 7$.
2. Знайдіть перший від'ємний член арифметичної прогресії $7,2; 6,6; 6; \dots$
Відповідь. $-0,6$.
3. Число 96 є членом геометричної прогресії $\frac{3}{8}; \frac{3}{4}; \frac{3}{2}; \dots$. Знайдіть номер цього члена.
Відповідь. 9.
4. Знайдіть суму всіх парних двоцифрових чисел.
Відповідь. 2430.
5. Знайдіть суму всіх трицифрових чисел, кратних 9, які не більші за 1000.
Відповідь. 55350.

III. Підпослідовності

Означення. Послідовність (b_n) називають **підпослідовністю** послідовності (a_n) , якщо $\forall k \in \mathbb{N} \exists n_k \in \mathbb{N}$ таке, що $b_k = a_{n_k}$, при чому $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$

Підпослідовність послідовності (a_n) зазвичай позначають символом (a_{n_k}) .

Теорема. Якщо послідовність має границю, то будь-яка її підпослідовність має ту саму границю.

Теорема. Якщо з послідовності можна виділити дві підпослідовності, які мають різні границі, то дана послідовність границі не має.

IV. Розв'язування вправ різного рівня складності

Для успішного розв'язування задач дотримуйтеся порад:

- 1) добре розберіться в означенні;
- 2) візуалізуйте послідовність на графіку для того, щоб краще побачити «наближення» до границі;
- 3) оцінюйте крайні випадки;
- 4) перевіряйте правильність кроків;
- 5) аналізуйте підпослідовності особливо у випадках якщо послідовності періодичні;
- 6) починайте із простих прикладів;
- 7) записуйте кроки по порядку;
- 8) будьте впевненими в собі.

Ілюстративні приклади

- 6.** Послідовність задано формулою загального члена $a_n = \frac{n-1}{2n+1}$. Для заданого числа $\varepsilon = 0,03$ укажіть такий номер n_0 , що для всіх $n > n_0$ виконується нерівність $\left| a_n - \frac{1}{2} \right| < \varepsilon$.

Розв'язання. Маємо $\left| a_n - \frac{1}{2} \right| = \left| \frac{n-1}{2n+1} - \frac{1}{2} \right| = \left| \frac{-3}{2(2n+1)} \right| = \frac{3}{2(2n+1)}$.

З'ясуємо, при яких n виконується нерівність $\frac{3}{2(2n+1)} < \frac{3}{100}$. Ця нерівність рівно-

сильна таким нерівностям: $\frac{1}{2n+1} < \frac{1}{50}$, $2n+1 > 50$, $n > 24,5$. Візьмемо $n_0 = 25$. Зрозуміло, що якщо $n > n_0$, то $n > 24,5$, а значить, виконується нерівність

$$\frac{3}{2(2n+1)} < \frac{3}{100}, \text{ тобто } \left| a_n - \frac{1}{2} \right| < \varepsilon.$$

Відповідь. $n_0 = 25$.

- 7.** Доведіть, за допомогою означення границі послідовності, що $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n-1}{2n+1} = \frac{3}{2}$.

Розв'язання. Знайдемо номер n_0 такий, що для всіх $n > n_0$ буде виконуватись нерівність $\left| \frac{3n-1}{2n+1} - \frac{3}{2} \right| < \varepsilon$, де ε — будь-яке наперед задане додатне число.

Розглянемо різницю $\left| \frac{3n-1}{2n+1} - \frac{3}{2} \right| = \left| \frac{-5}{2(2n+1)} \right| = \frac{5}{2(2n+1)}$.

З'ясуємо, при яких n виконується нерівність $\frac{5}{2(2n+1)} < \varepsilon$. Перейдемо до рівносильних нерівностей $5 < 4n\varepsilon + 2\varepsilon, 4n\varepsilon > 5 - 2\varepsilon, n > \frac{5}{4\varepsilon} - \frac{1}{2}$. Візьмемо n_0 рівним, наприклад, $\left\lceil \frac{5}{4\varepsilon} \right\rceil + 1$. Тоді якщо $n > n_0$, то очевидно, що $n > \frac{5}{4\varepsilon} - \frac{1}{2}$, і переходячи до рівносильних нерівностей, отримуємо $\frac{5}{2(2n+1)} < \varepsilon$.

Отже, для будь-якого $\varepsilon > 0$ вказано номер $n_0 = \left\lceil \frac{5}{4\varepsilon} \right\rceil + 1$ такий, що для всіх $n > n_0$ виконується нерівність $\left| \frac{3n-1}{2n+1} - \frac{3}{2} \right| < \varepsilon$, тобто $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n-1}{2n+1} = \frac{3}{2}$. Доведено.

- 8.** Доведіть, за допомогою означення границі послідовності, що $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 - n + 2}{n^2 + 3n - 1} = 2$.

Розв'язання. Розглянемо різницю:

$$\left| \frac{2n^2 - n + 2}{n^2 + 3n - 1} - 2 \right| = \left| \frac{-7n + 4}{n^2 + 3n - 1} \right| = \frac{7n - 4}{n^2 + 3n - 1} < \frac{7n}{n^2 + 3n - 1} < \frac{7n}{n^2} = \frac{7}{n}$$

Покажемо, що для будь-якого $\varepsilon > 0$ можна знайти номер n_0 такий, що для всіх $n > n_0$ виконується нерівність $\left| \frac{2n^2 - n + 2}{n^2 + 3n - 1} - 2 \right| < \varepsilon$.

Оскільки ми показали, що $\left| \frac{2n^2 - n + 2}{n^2 + 3n - 1} - 2 \right| < \frac{7}{n}$, то номер n_0 вигідно шукати, розв'язавши відносно n нерівність $\frac{7}{n} < \varepsilon$. Звідси $n > \frac{7}{\varepsilon}$. Візьмемо n_0 рівним, наприклад, $\left\lceil \frac{7}{\varepsilon} \right\rceil + 1$. Зрозуміло, що якщо $n > n_0$, то $n > \frac{7}{\varepsilon}$, а отже, потрібна нерівність буде виконуватись.

- 9.** Доведіть, що послідовність $x_n = \cos(n\pi)$ не має границі.

Розв'язання. Маємо: $x_1 = \cos(\pi) = -1$, $x_2 = \cos(2\pi) = 1$, $x_3 = \cos(3\pi) = -1$...

Розглянемо підпослідовності.

Якщо n – парне ($n = 2k$), де $k \in \mathbb{N}$, то: $x_{2k} = \cos(2k\pi) = 1$.

Якщо n – непарне ($n = 2k - 1$), де $k \in \mathbb{N}$, то: $x_{2k-1} = \cos((2k-1)\pi) = -1$.

Помічаємо, що границями підпослідовностей є різні числа, отже дана послідовність незбіжна.

- 10.** Доведіть, що $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n + 1}{x_n + 3} = \frac{3}{5}$ за умови, що $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 2$.

Розв'язання. Розглянемо модуль різниці: $\left| \frac{x_n + 1}{x_n + 3} - \frac{3}{5} \right| = \left| \frac{5x_n + 5 - 3x_n - 9}{5(x_n + 3)} \right| = \frac{2|x_n - 2|}{5|x_n + 3|}$.

$$\text{ГО } n > n_0: \left| \frac{x_n + 1}{x_n + 3} - \frac{3}{5} \right| < \frac{2\varepsilon_1}{5(5 - \varepsilon_1)} < \frac{4\varepsilon_1}{45}.$$

що $\varepsilon_1 < \frac{1}{2}$. Тоді, як сказано вище, знайдеться таке натуральне n_0 , що для будь-яко-

$$\text{го } n > n_0: \left| \frac{x_n + 1}{x_n + 3} - \frac{3}{5} \right| < \frac{4\varepsilon_1}{45} = \varepsilon. \text{ Доведено.}$$

- 1.** Послідовність задано формулою загального члена $a_n = \frac{n}{n+1}$. Для заданого числа ε укажіть такий номер n_0 , що для всіх $n > n_0$ виконується нерівність $|a_n - 1| < \varepsilon$:
- 1) $\varepsilon = \frac{1}{3}$; 2) $\varepsilon = \frac{1}{4}$; 3) $\varepsilon = 0,001$.

- ## Рівень С

- ## VI. Рефлексія (1–2 хв)

- 6

- 3) Під час уроку я зрозумів/зрозуміла, що вже вмію
-
-
- 4) Найскладнішим для мене було
-
-
- 5) Тепер я впевнений/упевнена у своїй здатності
-
-
- 6) Найбільше мені сподобалося
-
-

Можливі теми проєктів

1. Комп'ютерні моделі числових послідовностей.
2. Графічне дослідження границі числової послідовності.

Список використаної літератури

- 1) Мерзляк А. Г. Алгебра і початки аналізу : початок вивчення на поглиб. рівні з 8 кл., проф. рівень : підруч. для 10 кл. закладів загальної середньої освіти / А. Г. Мерзляк, Д. А. Номіровський, В. Б. Полонський, М. С. Якір. — Х. : Гімназія, 2018.
- 2) Мерзляк А. Г. Вчимося розв'язувати задачі з початків аналізу (навчально-методичний посібник) / А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонський, М. М. Рабінович, М. С. Якір. — Т.: Підручники & посібники, 2003.
- 3) Славич Л.Є. Матеріали до теми «Границя та неперервність». Алгебра і початки аналізу. 10 клас. / Л. Є. Славич, Н. Л. Смик // Науково-методичний журнал «Математика в школах України» — 2007 рік, №32 (188).
- 4) Ушаков Р. П. Границя числової послідовності в задачах. / Р. П. Ушаков // Науково-методичний журнал «Математика в школах України» — 2007 рік, №31(187).