

Тема 4.

Числові послідовності.

Границі числових послідовностей

Урок 13. Теорема про арифметичні дії зі збіжними послідовностями

РОБОЧИЙ АРКУШ

(моє ім'я)

I. Очікувані результати навчальних досягнень

На уроці ви навчитеся:

- 1) визначати збіжність числової послідовності;
- 2) формулювати теореми про арифметичні дії зі збіжними послідовностями;
- 3) застосовувати теореми про арифметичні дії зі збіжними послідовностями для розв'язування завдань;
- 4) аналізувати отримані результати.

II. Повторення

1. Знайдіть різницю дробів: $\frac{6+a}{a^2} - \frac{1}{a}$.

А	Б	В	Г	Д
$\frac{6}{a}$	$\frac{6}{a^2}$	$\frac{6+a}{a^2}$	$\frac{6+a^2}{a^2}$	інша відповідь

2. Спростіть вираз $\frac{\frac{a-b}{a+b} + \frac{b}{a}}{\frac{a}{a+b} - \frac{a-b}{a}}$.

А	Б	В	Г	Д
$\frac{a+b}{b}$	$\frac{a}{b}$	$\frac{a-b}{b}$	$\frac{a^2-b^2}{b^2}$	$\frac{a^2+b^2}{b^2}$

3. Дано $x^2 + \frac{16}{x^2} = 41$. Знайдіть значення виразу $x + \frac{4}{x}$.

4. Обчисліть границю послідовності $a_n = \frac{3}{n}$?

А	Б	В	Г	Д
0	1	2	3	∞

5. Серед вказаних послідовностей оберіть збіжну.

А	Б	В	Г	Д
$a_n = n^2$	$b_n = (-1)^n$	$c_n = \sin n$	$d_n = \frac{2n+2}{n}$	$f_n = \frac{n}{2}$

III. Теорема про арифметичні дії зі збіжними послідовностями

Знаходження границь збіжних послідовностей за означенням є трудомістким. Прискорити та спростити цей процес допомагають теореми про границі суми, добутку та частки послідовностей.

Теорема (границя суми). Якщо послідовності a_n і b_n є збіжними, то послідовність $(a_n + b_n)$ також є збіжною, причому $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$.

Теорема (границя добутку). Якщо послідовності a_n і b_n є збіжними, то послідовність $(a_n b_n)$ також є збіжною, причому $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$.

Наслідок. Зауважимо, що $\lim_{n \rightarrow \infty} (c a_n) = c \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$, де c — константа, а a_n — збіжна послідовність. Тобто константу можна виносити за знак границі.

Теорема (границя частки). Якщо послідовності a_n і b_n є збіжними, причому $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n \neq 0$, $b_n \neq 0$, то послідовність $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ також є збіжною і $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n}$.

- Приклад 1.** Знайдіть $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{n}$.

Розв'язання. Маємо: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n}{n} + \frac{1}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(2 + \frac{1}{n}\right)$.

4. Обчисліть границю:

1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-2n^2 + 7n + 1}{n^2 + 1}$; 2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5 - n}{n^2 + 3n - 8}$; 3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^4 - n^3 - n^2 - 1}{-3n^4 + n^2 + 12n}$.

5. Обчисліть границю:

1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n+1}{3-2n} \cdot \frac{n+3}{4n+5} \right)$; 2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)(n-2)(2n+3)}{(4n-1)(n+3)(5n-2)}$;
3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n(3n-1)(n+4)}{(4+5n)(2n+1)(n+1)}$.

6. Обчисліть границю:

1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n+1)(n+2)}{(n+3)(n+4)(n+5)}$; 2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+1)(3n-1)}{2n^2 - 3}$.

7. Обчисліть границю послідовності, заданої формулою:

1) $a_n = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^n}$; 2) $x_n = \frac{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n}}{1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \dots + \frac{1}{5^n}}$.

8. Послідовність задано рекурентно: $x_1 = \sqrt{2}$, $x_{n+1} = -\frac{x_n}{2}$, $n \in \mathbb{N}$. Знайдіть границю $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_1 + x_2 + \dots + x_n)$.

Рівень В

1. Відомо, що $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$. Доведіть, що: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^2 = a^2$.

2. Відомо, що $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$. Доведіть, що: $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n^k = b^k$, де $k \in \mathbb{N}$.

3. Відомо, що $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2$. Знайдіть границю:

1) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n a_{n+1}$; 2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 a_n + a_{n+2}}{(a_n - n)^2 + 1}$.

4. Послідовність (a_n) прямує до числа 3. Знайдіть границю:

1) $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + a_{n+1})(a_n - 2)$; 2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+3} - 1}{a_n^2 + 5}$.

5. Знайдіть границю $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{7n^2 + 2}{3n^2 - 2n + 1} + \frac{2 - n}{3n - 5} \right)$.

6. Послідовність (a_n) така, що існує границя $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+1} + a_n)$. Чи можна стверджувати, що послідовність (a_n) є збіжною?

7. З послідовності (x_n) утворили послідовність із загальним членом $y_n = x_n^2 - 5x_n + 6$. Відомо, що (y_n) — збіжна послідовність. Чи завжди є збіжною послідовність (x_n) ?

8. За послідовністю (x_n) побудували послідовність (y_n) таку, що $y_n = x_n - x_{n+3}$. Виявилося, що послідовність (y_n) має границю. Чи обов'язково є збіжною послідовність (x_n) ?

Рівень С

1. Члени послідовності (x_n) для всіх $n \in \mathbb{N}$ задовольняють умову $x_{n+1} = x_n^2 + 4x_n + 3$. Чи існує таке x_1 , що (x_n) — збіжна послідовність?

- 2.** Доведіть, що послідовність (a_n) , члени якої для всіх $n \in \mathbb{N}$ задовольняють рівність $3a_{n+2}(a_{n+1} - 1) = 2a_n - 5$, є розбіжною.
- 3.** З послідовності (x_n) утворили нову послідовність (S_n) за формулою $S_n = x_1 + x_2 + \dots + x_n$, $n \in \mathbb{N}$. Виявилося, що (S_n) — збіжна послідовність. Чи обов'язково $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$?
- 4.** Знайдіть границю послідовності (x_n) , заданої формулою:
- 1) $x_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n+1)}$;
 - 2) $x_n = \frac{1^2 + 2^2 + \dots + n^2}{n^3}$;
 - 3) $x_n = \frac{1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \dots + n \cdot n!}{(n+1)!}$.
- 5.** Знайдіть границю послідовності (x_n) , заданої формулою:
- 1) $x_n = \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \dots + \frac{n}{(n+1)!}$;
 - 2) $x_n = \frac{2^3 - 1}{2^3 + 1} \cdot \frac{3^3 - 1}{3^3 + 1} \cdot \dots \cdot \frac{n^3 - 1}{n^3 + 1}$;
 - 3) $x_n = \frac{1^3 + 2^3 + \dots + n^3}{n^4}$.
- 6*.** Побудуйте графік функції $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{2n+1}}{1 + x^{2n}}$.
- 7*.** Дослідіть на збіжність послідовність (x_n) , якщо:
- 1) $x_n = \sin 6n$;
 - 2) $x_n = \sin 1 + \sin 2 + \dots + \sin n$.
- 8*.** Чи існує границя послідовності із загальним членом $x_n = \cos 7n$?

Рефлексія

- 1) Я сьогодні навчився/навчилась
-
-
- 2) Мені здалося цікавим
-
-
- 3) У мене залишилися запитання щодо
-
-

Можливі теми проєктів

- 1.** Доведення теорем про арифметичні дії зі збіжними послідовностями.
- 2.** Комп'ютерна візуалізація теорем про границі.







