

Тема 4.

Числові послідовності.

Границі числових послідовностей

Урок 14. Урок–практикум. Арифметичні дії з числовими послідовностями. Нескінченно малі послідовності

РОБОЧИЙ АРКУШ

(моє ім'я)

I. Очікувані результати навчальних досягнень

На уроці ви навчитеся:

- 1) виконувати арифметичні дії з числовими послідовностями та їхніми границями;
- 2) пояснювати, що таке нескінченно мала послідовність;
- 3) розпізнавати нескінченно малі послідовності за формулою n -го члена;
- 4) застосовувати властивості нескінченно малих послідовностей;
- 5) обґрунтовувати отримані результати обчислень;
- 6) застосовувати здобуті знання для розв'язування вправ.

II. Повторення

1. Знайдіть значення виразу $\frac{6}{5x-20} - \frac{x-5}{x^2-8x+16}$, якщо $x = 3$.
2. Спростіть вираз $\frac{\sqrt{6}+2}{\sqrt{6}-2} - \frac{\sqrt{6}-2}{\sqrt{6}+2}$.
3. Знайдіть значення виразу $\left(\sqrt{5-2\sqrt{6}} + \sqrt{5+2\sqrt{6}}\right)^2$.
4. Спростіть вираз $\left(\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{m}+\sqrt{n}} - \frac{\sqrt{n}-\sqrt{m}}{\sqrt{n}}\right) : \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{n}}$.

5. Знайдіть усі натуральні значення n , при яких є цілим числом значення виразу $\frac{3n^2 - 4n - 14}{n}$.

III. Нескінченно малі послідовності

Означення. Послідовність (a_n) , для якої $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, називають **нескінченно малою послідовністю**.

Наприклад, послідовності, які задано формулами $a_n = \frac{100}{n}$, $b_n = -\frac{1}{n^2}$, $c_n = \frac{2}{\sqrt{n}}$ є нескінченно малими.

Основні властивості нескінченно малих послідовностей

Теорема. Сума скінченного числа нескінченно малих послідовностей є нескінченно малою послідовністю.

Теорема. Якщо послідовність (a_n) нескінченно мала, а послідовність (b_n) обмежена, то послідовність $(a_n \cdot b_n)$ нескінченно мала.

Наслідок 1. Добуток нескінченно малої та збіжної послідовностей є нескінченно малою послідовністю.

Наслідок 2. Добуток скінченного числа нескінченно малих послідовностей — нескінченно мала послідовність.

Теорема. Для того щоб число a було границею послідовності (a_n) , необхідно і достатньо, щоб виконувалася рівність $a_n = a + \beta_n$, де (β_n) — нескінченно мала послідовність.

IV. Розв'язування вправ різного рівня складності

Поради перед розв'язуванням вправ

- 1) Спочатку знаходьте границі окремих послідовностей.
- 2) Користуйтеся правилами про арифметичні дії з границями.
- 3) Перетворюйте вирази перед знаходженням границі.
- 4) Пам'ятайте: нескінченно мала послідовність прямує до нуля.
- 5) Перевіряйте результат логічно або за кількома членами.

Приклад 1. Обчисліть границю $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 2n - 1}{3n^3 + n - 2}$.

Розв'язання. Розділивши чисельник і знаменник дробу на n^3 , маємо:

Відповідь. 0.

[illegible][illegible]

Рівень В

1. Обчисліть:

$$1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2)! + (n+1)!}{(n+3)!};$$

$$2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2)! + (n+1)!}{(n+2)! - (n+1)!}.$$

2. Обчисліть:

$$1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{(n+1)! - n!};$$

$$2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! + (n+2)!}{((n+1)! + n!) \cdot n}.$$

3. Обчисліть:

$$1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! + (n+1)!}{(n+2)! + (n+3)!};$$

$$2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2) \cdot n!}{(n+1)!}.$$

4. Обчисліть:

$$1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin^2(n+2)}{n+2};$$

$$2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} \sin \frac{\pi(n+1)}{n+2};$$

$$3) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \sqrt{n}}{n+2};$$

$$4) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+2} \cos(n^2 + n).$$

5. Обчисліть:

$$1) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\ln 2 + \sqrt{nn}}{\sqrt{2n+3}} + \frac{\cos n}{n^2} \right);$$

$$2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^2} \sin n!}{n+1};$$

$$3) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(\cos \frac{\pi}{2} n \right) \frac{1}{n+2} \right);$$

$$4) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sin \frac{1}{n} \cos n \right).$$

6. Обчисліть:

$$1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n + \sin n}{2n + \sin n};$$

$$2) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2 + n}{n \sin n + n^2} + \frac{\sqrt{2}n}{n+1} \right);$$

$$3) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n^2 + \sin n + \cos n}{3n^2 - n + \sin^2 n} + \frac{2n+1}{\sqrt{2n-2}} \right);$$

$$4) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^3 + 3n^2 \sin n + n \cos n + 1}{3n^3 + 5n \cos 2n + 5}.$$

Рівень С

1. Обчисліть:

$$1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4 \cdot 6^n - 9 \cdot 7^{n+1}}{7^n};$$

$$2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n + 3^n}{3^{n+1}};$$

$$3) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n + 3^n + 4^n}{4^{n+1} + 3}.$$

2. Обчисліть:

$$1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n - 1}{2^n + 1};$$

$$2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 2^{-n} + 3^{-n}}{1 + 3^{-n}};$$

$$3) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 2^{-n} + 3 \cdot 5^{-n}}{7 + 3^{-n} + 7^{-n}}.$$

3. Обчисліть:

$$1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{2^n + 1}};$$

$$2) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n+4}{7n+5} - \frac{5^n+1}{4-3 \cdot 5^n} \right);$$

$$3) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4n^2 + \sin n}{3n^2 + n \cos 2n} - \frac{5^n + 3^n}{3 \cdot 5^n - 2^n} \right).$$

4. Обчисліть:

$$1) \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n});$$

$$2) \lim_{n \rightarrow \infty} (n - \sqrt{n^2 + 3});$$

$$3) \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 - n} - n);$$

$$4) \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{2n+1} - \sqrt{2n}).$$

5. Обчисліть:

1) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{3n^2 + 2n - 1} - \sqrt{3n^2 - 4n + 8})$; 2) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{4n^2 + n + 1} - 2n)$;
3) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{(n+1)(n+2)} - n)$.

6. Обчисліть:

1) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n + \sqrt{n}} - \sqrt{n})$; 2) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n + \sqrt{n + \sqrt{n}}} - \sqrt{n})$;
3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{\sqrt{n+3} - \sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}} \right)$.

Рефлексія

- 1) На уроці я дізнався/дізналася
- 2) Мені найбільше запам'яталося
- 3) Для мене було найцікавішим
- 4) Для мене було найскладнішим
- 5) Я припустився/припустилася помилки
- 6) Я хочу повторити, аби краще зрозуміти
- 7) Поради собі до наступного уроку

Можливі теми проєктів

1. Нескінченно малі послідовності в математиці та в фізиці.
2. Арифметичні дії з границями: приклади та застосування.
3. Роль нескінченно малих послідовностей у наближених обчисленнях.







