

Тема 4.

Числові послідовності. Границі числових послідовностей

Урок 15. Властивості збіжних послідовностей

РОБОЧИЙ АРКУШ

(моє ім'я)

I. Очікувані результати навчальних досягнень

На уроці ви навчитеся:

- 1) формулювати властивості збіжних послідовностей;
- 2) обґрунтовувати, чому збіжна послідовність є обмеженою;
- 3) використовувати властивості границь для спрощення обчислень;
- 4) застосовувати властивості збіжних послідовностей для розв'язування задач.

II. Повторення

1. Знайдіть границю $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n+2}{n-1}$.
2. Знайдіть границю $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2-5}{2n^2+3n}$.
3. Знайдіть границю $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(5 + \frac{2}{n}\right)$.
4. Якщо $a_n \rightarrow 4$, знайдіть $\lim(a_n^2)$.
5. Розв'яжіть нерівність $\left|\frac{1}{n}\right| < 0,05$. Знайдіть найменше натуральне n , починаючи з якого нерівність виконується.

III. Властивості збіжних послідовностей

Розглянемо деякі властивості збіжних послідовностей.

Теорема. Збіжна послідовність є обмеженою.

Теорема. Якщо $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ і $a > b$ ($a < b$), то, починаючи з деякого номера n_0 , виконується нерівність $a_n > b$ ($a_n < b$).

Наслідок. Якщо $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, $a \neq 0$, то, починаючи з деякого номера n_0 , виконується нерівність $|a_n| > r$, де r — деяке додатне число.

Теорема. Якщо для всіх $n \in \mathbb{N}$ виконується нерівність $a_n \geq b_n$, причому існують границі $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ і $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$, то $a \geq b$.

Теорема 4 (про двох конвоїрів). Якщо для всіх $n \in \mathbb{N}$ виконується подвійна нерівність $a_n \leq c_n \leq b_n$, причому послідовності (a_n) і (b_n) збігаються до спільної границі, тобто $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a$, то послідовність (c_n) також є збіжною і $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = a$.

Теорема. Якщо $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, де $a_n \geq 0$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{a}$.

Теорема (границя кореня). Якщо $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, де $a_n > 0$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[k]{a_n} = \sqrt[k]{a}$, де $k \in \mathbb{N}$, $k > 1$.

Приклад 1. Доведіть, що послідовність (a_n) , яку задано формулою $a_n = \frac{n^3 - 6}{3n^2 + n}$, є розбіжною.

Розв'язання. Доведемо, що послідовність (a_n) є необмеженою, а отже, не може бути збіжною. Справді, для всіх $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, має місце нерівність: $n^3 - 6 > \frac{n^3}{2}$.

Крім того, для всіх $n \in \mathbb{N}$ має місце нерівність: $3n^2 + n \leq 4n^2$.

Таким чином, для всіх $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, маємо: $a_n = \frac{n^3 - 6}{3n^2 + n} > \frac{\frac{n^3}{2}}{4n^2} = \frac{n}{8}$.

Оскільки значення виразу $\frac{n}{8}$, де $n \in \mathbb{N}$, можуть бути як завгодно великими, то послідовність (a_n) не є обмеженою зверху, що доводить розбіжність послідовності (a_n) . Доведено.

[illegible][illegible]

5. Знайдіть границю:

1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{\sqrt[3]{n}}\right)$; 2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n-2}{n}$; 3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2+1}{n^2}$; 4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n}+1)^2 - n}{\sqrt{n}}$.

6. Знайдіть границю:

1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(3 - \frac{5}{n^2}\right)$; 2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2-7n^3}{n^3}$;
3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(n^2 + \frac{1}{n^2}\right)^2 - n^4$; 4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{11n-2^n}{2^n}$.

7. Для даної збіжної послідовності (a_n) знайдіть нескінченно малу послідовність (β_n) таку, що $a_n = a + \beta_n$, де a — границя послідовності (a_n) :

1) $a_n = \frac{1}{n}$; 2) $a_n = \frac{n}{n+1}$; 3) $a_n = \frac{4n-2}{3n+1}$; 4) $a_n = \frac{n^2 + (-1)^n}{n^2 + 1}$.

8. Для даної збіжної послідовності (a_n) знайдіть нескінченно малу послідовність (β_n) таку, що $a_n = a + \beta_n$, де a — границя послідовності (a_n) :

1) $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$; 2) $a_n = \frac{n+1}{n}$; 3) $a_n = 2 - \frac{(-1)^n}{n^2 + 1}$; 4) $a_n = \frac{2n}{n+3}$.

Рівень В

1. Для членів послідовностей (a_n) і (b_n) при кожному $n \in \mathbb{N}$ виконується нерівність $0 \leq a_n \leq b_n$. Чи є правильним твердження:

- 1) якщо послідовність (b_n) нескінченно мала, то й послідовність (a_n) нескінченно мала;
2) якщо послідовність (a_n) нескінченно мала, то й послідовність (b_n) нескінченно мала?

2. Чи є збіжною послідовність:

1) $x_n = \frac{n^2+4}{n+3}$; 2) $x_n = \sqrt[3]{n} - \sqrt{n}$; 3) $x_n = n^2 \sin n^\circ$?

3. Чи є збіжною послідовність:

1) $x_n = \frac{n}{\sqrt{n+3}}$; 2) $x_n = 2^n - \cos n$; 3) $x_n = n^{(-1)^n}$?

4. Обчисліть границю $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$.

5. Обчисліть границю $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(n - \sqrt{n^2+3}\right)$.

6. Обчисліть границю $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{n^2-n} - n\right)$.

7. Обчисліть границю $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^2+3n}\right)$.

8. Доведіть рівність:

1) $\lim_{n \rightarrow \infty} nq^n = 0$, де $q \in (-1; 1)$; 2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1$, де $a \geq 1$.

Рівень С

1. Знайдіть границю послідовності:

$$1) x_n = \frac{\sqrt{n}}{5^n}; \quad 2) x_n = \frac{\sqrt[3]{n^2}}{2^n}; \quad 3) x_n = \sqrt{\frac{3^n \cdot n}{5^n}}; \quad 4) x_n = \frac{n-1}{2^n}.$$

2. Доведіть, що послідовність є нескінченно малою:

$$1) x_n = \frac{\sqrt[3]{n}}{2^n}; \quad 2) x_n = \frac{n}{2^n + 1}; \quad 3) x_n = \sqrt[3]{\frac{3^n n^6}{5^n}}.$$

3. Послідовність (a_n) прямує до нуля. Чи можна стверджувати, що послідовність (S_n) , яку задано формулою $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$, має границю?

4. Знайдіть границю послідовності:

$$1) x_n = \sqrt[n]{4^n + n}; \quad 2) x_n = \frac{\sin n}{n};$$

$$3) x_n = \sqrt[n^2]{n}; \quad 4) x_n = \sqrt[n^2]{1^{n-1} + 2^{n-1} + \dots + n^{n-1}}.$$

5. Знайдіть границю послідовності:

$$1) x_n = \sqrt[n]{5^n + n - 2}; \quad 2) x_n = \frac{\cos(n!)}{\sqrt{n}}; \quad 3) x_n = \sqrt[n]{1 + 2^n + 7^n}; \quad 4) x_n = \sqrt[n^2]{n!}.$$

6*. Побудуйте графік функції $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1 + x^{2n}}$.

7*. Знайдіть границю послідовності $x_n = \frac{1}{\sqrt[n]{n^n + 1}} + \frac{1}{\sqrt[n]{n^n + 2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt[n]{n^n + n}}$.

8*. Знайдіть границю послідовності $x_n = \frac{1^5 + 3^5 + 5^5 + \dots + (2n-1)^5}{n^7}$.

VI. Рефлексія. «Плюс-Мінус-Цікавинка» (1–2 хв)

(+) що було зрозумілим:

.....

.....

(–) що залишилося незрозумілим:

.....

.....

(?) що здивувало або зацікавило:

.....

.....

Можливі теми для проєктів

1. Доведення властивостей числових послідовностей.

2. Зв'язок між монотонністю, обмеженістю та збіжністю числових послідовностей.







