

Тема 4.

Числові послідовності.

Границі числових послідовностей

Урок 16. Теорема Вейєрштрасса

РОБОЧИЙ АРКУШ

(моє ім'я)

I. Очікувані результати навчальних досягнень

На уроці ви навчитеся:

- 1) працювати з математичними моделями нескінченних процесів;
- 2) обґрунтовувати існування границі без її точного обчислення;
- 3) використовувати строгі математичні твердження для розв'язування задач;
- 4) знаходити зв'язок між алгеброю, геометрією та аналізом.

II. Повторення

1. Обчисліть: $(\sqrt{3} - 1)^2 + \sqrt{12}$.
2. Обчисліть: $\frac{-6 \cdot \sqrt{0,25} + 0,5 \cdot \sqrt{324}}{9}$.
3. Обчисліть: $\left(\left(\sqrt[3]{3} \right)^3 \right)^3$.
4. Скільки раціональних чисел записано в ряду: $-\frac{\sqrt[3]{125}}{3}$, π^0 , $\left(4^{\frac{5}{2}} \right)^{-2}$, $\sqrt[3]{16}$, $\frac{1}{2} \cdot \sqrt[5]{30}$?
5. Обчисліть $(0,001)^{\frac{1}{3}} + 27^{-\frac{2}{3}} + (6^0)^5 \cdot 2 - 3^{-4} \cdot 81^{-\frac{3}{2}} \cdot 27$.

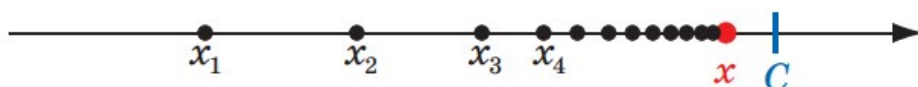
III. Теорема Вейерштрасса

Важливою ознакою збіжності послідовності є теорема Вейерштрасса.

Теорема (теорема Вейерштрасса). Кожна зростаюча й обмежена зверху (спадна й обмежена знизу) послідовність має границю.

Твердження цієї теореми має просту геометричну інтерпретацію.

Справді, якщо послідовність (x_n) зростає, то кожний наступний її член буде розташований на числовій прямій правіше всіх попередніх членів (див. рисунок). Крім цього, за рахунок обмеженості послідовності (x_n) зверху числом C її члени не можуть необмежено зростати. А отже, існує число x , до якого прямує послідовність (x_n) .

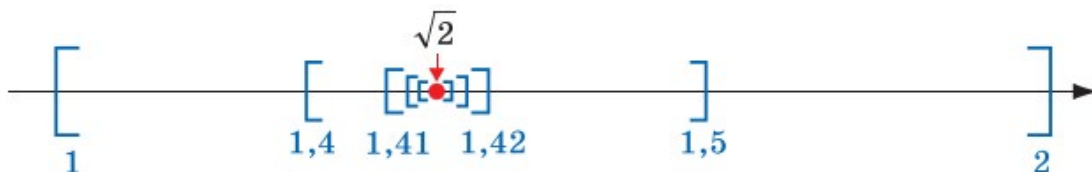


IV. Принцип вкладних відрізків

Теорема (принцип вкладених відрізків). Будь-яка послідовність вкладених відрізків $[a_1; b_1] \supset [a_2; b_2] \supset [a_3; b_3] \supset \dots$ має непорожній перетин, тобто існує число x_0 , яке належить усім відрізкам $[a_k; b_k]$.

Наприклад, послідовність вкладених відрізків $[-1; 1] \supset [-1; \frac{1}{2}] \supset [-1; \frac{1}{3}] \supset \dots$ має непорожній перетин — відрізок $[-1; 0]$, тобто існує число x_0 , наприклад $x_0 = 0$, яке належить усім названим відрізкам.

Розглянемо інший приклад. Як відомо, $\sqrt{2} = 1,414\dots$. Тоді послідовність вкладених відрізків $[1; 2] \supset [1,4; 1,5] \supset [1,41; 1,42] \supset [1,414; 1,415] \supset \dots$ має непорожній перетин — одноеlementну множину $\{\sqrt{2}\}$ (див. рисунок).



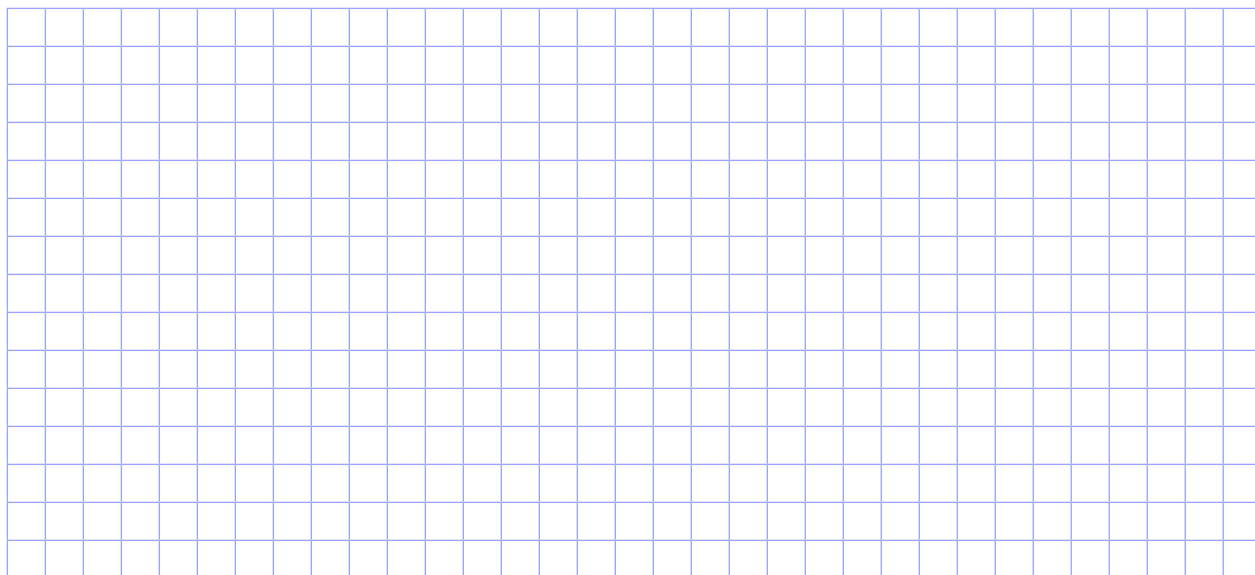
Примітка. Для множини раціональних чисел принцип вкладених відрізків не виконується. Наприклад, якщо на множині раціональних чисел розглянути послідовність вкладених відрізків з останнього прикладу, то не знайдеться жодного раціонального числа, яке належить усім цих відрізкам.

Приклад 1. Доведіть, що не існує такої послідовності (x_n) , серед членів якої є кожне число відрізка $[0; 1]$.

Доведення. Розглянемо довільну послідовність (x_n) . Оберемо на $[0; 1]$ такий відрізок $[a_1; b_1]$, який не містить x_1 (зрозуміло, що такий відрізок існує). Далі на відрізку

$[a_1; b_1]$ оберемо такий відрізок $[a_2; b_2]$, який не містить x_2 . Продовжуючи цей процес, побудуємо послідовність вкладених відрізків $[0; 1] \supset [a_1; b_1] \supset [a_2; b_2] \supset [a_3; b_3] \supset \dots$, у якій відрізок $[a_k; b_k]$ не містить x_k , тобто $x_k \notin [a_k; b_k]$. Тому жоден член послідовності (x_n) не може належати перетину побудованих відрізків. Але цей перетин непорожній і містить деяке число $x \in [0; 1]$. Таким чином, доведено, що число x не представлено в послідовності (x_n) , тобто доведено, що відрізок $[0; 1]$ — незліченна множина.

Приклад 2. Послідовність (a_n) задано рекурентним способом: $a_1 = \sqrt{2}$, $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$, $n \in \mathbb{N}$. Дослідіть послідовність (a_n) на збіжність і в разі збіжності знайдіть границю.



V. Тренувальні вправи. Три рівні складності: А, В, С

Рівень А

- Послідовність (a_n) є збіжною. Чи можна стверджувати, що послідовність (a_n) є:
1) монотонною; 2) обмеженою?
- Послідовність (a_n) задано формулою $a_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \left(1 - \frac{1}{2^3}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{2^n}\right)$. Чи існує границя $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$?
- Послідовність (a_n) задано формулою $a_n = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (2n)}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (2n+1)}$. Чи існує границя $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$?
- Чи існує така послідовність вкладених відрізків $[a_1; b_1] \supset [a_2; b_2] \supset [a_3; b_3] \supset \dots$, що їхній перетин складається рівно з двох точок?
- Чи обов'язково послідовність вкладених інтервалів $(a_1; b_1) \supset (a_2; b_2) \supset (a_3; b_3) \supset \dots$ має непорожній перетин?

Рівень В

1. Послідовність вкладених відрізків $[a_1; b_1] \supset [a_2; b_2] \supset [a_3; b_3] \supset \dots$ задовольняє умову $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = 0$. Доведіть, що відрізки $[a_n; b_n], n \in \mathbb{N}$, містять лише одну спільну точку.
2. Послідовність (a_n) складається з додатних чисел. Доведіть, що коли послідовність (b_n) із загальним членом $b_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ є обмеженою, то вона є збіжною.
3. Доведіть збіжність послідовності:

1) $a_n = \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{2^n + 1}$;	3) $a_n = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2}$;
2) $a_n = \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!}$;	4) $a_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}$.
4. Доведіть збіжність послідовності:

1) $a_n = \frac{1}{1} + \frac{1}{7} + \frac{1}{25} + \dots + \frac{1}{3^n - 2}$;	3) $a_n = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots + \frac{1}{(2n-1)^2}$;
2) $a_n = \frac{1}{1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{n^n}$;	4) $a_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{5n}$.
5. Послідовність (x_n) задано рекурентним способом: $x_1 = 5$, $x_{n+1} = \sqrt{5 + x_n}$, $n \in \mathbb{N}$. Дослідіть на збіжність послідовність (x_n) і в разі збіжності знайдіть її границю.

Рівень С

1. Для $a > 1$ розглянемо послідовність (x_n) із загальним членом $x_n = \frac{n}{a^n}$. Знайдіть рекурентну формулу, що зв'язує x_{n+1} і x_n . Використовуючи знайдену формулу та теорему Вейерштрасса, доведіть, що $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{a^n} = 0$.
2. Послідовність задано рекурентним способом: $a_1 = 1$, $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{a_n^2}$, $n \in \mathbb{N}$. Чи є обмеженою послідовність (a_n) ?
3. Послідовність задано рекурентним способом: $a_1 = 0$, $a_{n+1} = \frac{2a_n^2 + 2na_n + 3}{n + a_n}$, $n \in \mathbb{N}$. Чи є ця послідовність обмеженою?
4. Послідовність (x_n) є обмеженою. Доведіть існування такого числа x , що при кожному $\varepsilon > 0$ проміжок $(x - \varepsilon; x + \varepsilon)$ містить нескінченну кількість членів послідовності (x_n) .
5. Послідовність (a_n) задано рекурентним способом: $a_1 \in (0; 1)$, $a_{n+1} = a_n - a_n^2, n \in \mathbb{N}$. Покладемо $b_n = a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2$. Доведіть, що послідовність (b_n) є збіжною і $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n < 1$.
- 6*. Послідовності (a_n) і (b_n) задовольняють умови: $a_1 = 1$, $b_1 = 9$, $a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$, $b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$, $n \in \mathbb{N}$. Доведіть, що послідовності (a_n) і (b_n) збігаються та $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$.

7*. Доведіть, що послідовність, задана формулою $x_n = \sqrt{1 + \sqrt[3]{2 + \sqrt[4]{3 + \sqrt[5]{\dots + \sqrt[n+1]{n}}}}}$, має границю.

Рефлексія

Оцініть розуміння теми уроку балами від 1 до 10.

Мої враження від уроку

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Жахливі									Чудові

Назвіть дві речі, які вам сподобалися на уроці, й одну річ, яка вам не сподобалася, або у вас усе ще залишилися запитання.

- 1)
-
-
- 2)
-
-
- ?
-
-
-

Можливі теми проєктів

- 1.** Теорема Вейерштрасса і її значення.
- 2.** Принцип вкладених відрізків: геометрична інтерпретація.

