

Тема 4.

Числові послідовності.

Границі числових послідовностей

Урок 17. Число Ойлера

РОБОЧИЙ АРКУШ

(моє ім'я)

I. Очікувані результати навчальних досягнень

На уроці ви навчитеся:

- 1) пояснювати, як виникає число Ойлера через границю послідовності;
- 2) обчислювати границі числових послідовностей за допомогою числа Ойлера
- 3) застосовувати властивості границь числових послідовностей до перетворення виразів;
- 4) робити висновки на основі числових залежностей.

II. Повторення

1. Якщо C — довжина кола, а d — його діаметр, то $\frac{C}{d} = ?$

А	Б	В	Г	Д
$2p$	p	p^2	$2p^2$	правильної відповіді немає

2. Яке число є ірраціональним?

А	Б	В	Г	Д
3,14	$\sqrt{2}$	$\frac{22}{7}$	0,25	$\sqrt{100}$

3. Яке число є найбільшим за модулем?

А	Б	В	Г	Д
$6,6 \cdot 10^{-34}$	$9,1 \cdot 10^{-31}$	$1,6 \cdot 10^{-19}$	$3 \cdot 10^8$	$3 \cdot 10^{10}$

4. Яке число на координатній прямій знаходиться найближче до числа p ?

А	Б	В	Г	Д
3	3,1	3,13	3,15	3,2

5. Яке із чисел є невизначеним?

А	Б	В	Г	Д
0^0	1^0	0^1	1^1	$(-1)^0$

III. Число Ойлера та друга чудова границя

У математичному аналізі існують фундаментальні послідовності, які мають визначальне значення для становлення й подальшого розвитку цього розділу математики. Вони є теоретичною основою багатьох понять і методів та відіграють ключову роль під час вивчення наступних тем, зокрема похідної, неперервності та дослідження функцій.

Одною із таких послідовностей є $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. Ця послідовність є збіжною (доведемо

цей факт в ілюстративних прикладах) та її границю $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ (або границю

$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$) називають **числом Ойлера** та позначають буквою e , а рівність

$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$ — **другою чудовою границею**.

Можна довести, що e — число ірраціональне. Зазначимо, що при цьому всі члени послідовності (x_n) — числа раціональні.

Оскільки (x_n) — зростаюча, (y_n) — спадна послідовності, що мають спільну границю, то для всіх $n \in \mathbb{N}$ виконуються нерівності $x_n < e < y_n$.

Наведені оцінки дають можливість знайти наближене значення числа Ойлера, обчисливши x_n та y_n при «великих» значеннях n .

Наприклад, $x_{1000} = 2,716\dots$, а $y_{1000} = 2,719\dots$. Це означає, що $e = 2,71\dots$

Теорема. Якщо $k \neq 0$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{k}{n}\right)^n = e^k$.

Історична довідка

1. Відкриття і перші згадки.

Число e вперше виникло на практичних розрахунках з відсоткового зростання капіталу в XVII столітті. Вперше його вивчав Яків Бернуллі, розглядаючи ситуацію «безперервного нарощування відсотків» (1690-ті роки).

2. Внесок Леонарда Ойлера.

У XVIII столітті Леонард Ойлер систематизував властивості числа e і дав йому сучасну позначку e . Він довів, що число e можна визначити як границю: $e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ та пов'язав його з логарифмічною та експоненціальною функціями, які ви будете вивчати пізніше.

3. Важливість числа e .

Дане число виникає в математичному аналізі, теорії ймовірностей, фінансах, фізиці та біології. Воно з'являється та має своє застосування скрізь, де є безперервне зростання або спад.

4. Цікаві факти.

- Число e ірраціональне.
- Його наближене значення: $e \approx 2,71828$.
- Жуль Верн народився у 1828 році. Тому легко запам'ятати дев'ять цифр після коми числа Ойлера: 2,718281828..., як двічі поспіль записаний рік народження Жуля Верна.
- Разом із π , $\sqrt{2}$ та числом золотого перерізу, число e належить до найвідоміших математичних констант.

5. Математичні відкриття після Ойлера.

- Розвинуто поняття експоненційної функції e^x .
- З'явилися формули, що зв'язують число e із тригонометрією та комплексними числами.

Приклад 1. Доведіть, що послідовності $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ та $y_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$ є збіжними та їхні границі рівні.

Доведення. Дослідимо властивості послідовностей (x_n) і (y_n) , які задано формулами $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, $y_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$.

1) Доведемо, що для всіх $n \in \mathbb{N}$ виконується нерівність $x_n < y_n$.

Справді, $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = y_n$.

2) Доведемо, що послідовність (x_n) є зростаючою.

Достатньо довести нерівність $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$.

Застосуємо нерівність $\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_k}{k} \geq \sqrt[k]{a_1 a_2 \dots a_k}$, $a_i \geq 0$, яку називають нерівністю Коші (рівність досягається при $a_1 = a_2 = \dots = a_k$).

Покладемо $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 1 + \frac{1}{n}$, $a_{n+1} = 1$. Тоді при $k = n+1$ маємо:

$$\frac{\overbrace{\left(1 + \frac{1}{n}\right) + \left(1 + \frac{1}{n}\right) + \dots + \left(1 + \frac{1}{n}\right) + 1}^{n \text{ доданків}}}{n+1} > \sqrt[n+1]{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot 1}.$$

$$\text{Звідси: } \frac{n\left(1 + \frac{1}{n}\right) + 1}{n+1} > \sqrt[n+1]{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}.$$

$$\text{Тоді: } \left(\frac{n+1+1}{n+1}\right)^{n+1} > \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n; \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} > \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

3) Аналогічно, скориставшись нерівністю Коші для $k = n + 2$ та чисел

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_{n+1} = \frac{n}{n+1}, \alpha_{n+2} = 1, \text{ доводимо, що послідовність } (y_n) \text{ є спадною.}$$

4) Доведемо, що послідовності (x_n) і (y_n) є обмеженими. Цей факт випливає з нерівностей $x_1 \leq x_n \leq y_n \leq y_1, n \in \mathbb{N}$.

5) Отже, (x_n) і (y_n) — монотонні й обмежені послідовності. Тому за теоремою

Вейерштрасса існують границі $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = a, \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = b$.

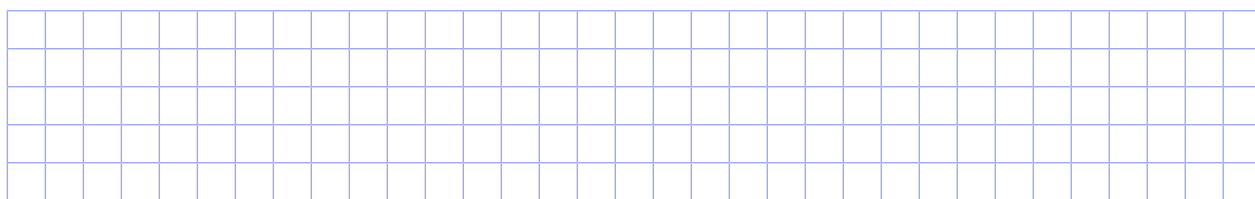
6) Якщо в рівності $y_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right) \cdot x_n$ перейти до границі, то отримаємо:

$$b = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1 \cdot a.$$

Таким чином, доведено, що (x_n) і (y_n) — збіжні послідовності, причому

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n.$$

Приклад 2. Знайдіть границю $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n$.



IV. Розв'язання практичної задачі

Як я вирішую певну проблему?

Задача. При знаходженні $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, учениця 11 класу, стверджує:

$$\text{«Оскільки } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1, \text{ то } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} 1^n = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1\text{»}.$$

У чому полягає помилка учениці?

V. Тренувальні вправи. Три рівні складності: А, В, С

Рівень А

1. Знайдіть границю:

$$1) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n+1}{3n} \right)^n; \quad 2) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n} \right)^{5n+2}; \quad 3) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n} \right)^n.$$

2. Знайдіть границю:

$$1) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-k}{n} \right)^n; \quad 2) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2+2}{n^2+4} \right)^{n^2}.$$

3. Знайдіть границю:

$$1) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n-2}{3n+1} \right)^{2n+2}; \quad 2) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n^2} \right)^n.$$

Рівень В

1. Знайдіть границю $\lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt[n]{e} - 1)$.

2. Доведіть, що $0 < e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \frac{3}{n}$. Для якого значення n треба обчислити $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, щоб отримати наближене значення числа Ойлера з точністю 10^{-4} ?

3*. Знайдіть $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - (n-1)^n}{(n+1)^n}$.

Рівень С

1. Доведіть збіжність послідовності (x_n) , яку задано формулою $x_n = \frac{e^{\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}}}{n}$.

2. Для всіх $n \in \mathbb{N}$ доведіть нерівності $n^n e^{-n+1} \leq n! \leq n^{n+1} e^{-n+1}$. Знайдіть границю $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$.

Рефлексія

- 1) На уроці я дізнався/дізналася
-
-
- 2) Мені найбільше запам'яталося
-
-
- 3) Для мене було найцікавішим
-
-

- 4) Для мене було найскладнішим
-
-
- 5) Я припустився/припустилася помилки
-
-
- 6) Я хочу повторити, аби краще зрозуміти
-
-
- 7) Поради собі до наступного уроку
-
-

Можливі теми проєктів

1. Історія відкриття числа e .
2. Роль фундаментальних констант (число p , число e , відношення золотого перерізу) в математиці.
3. Комп'ютерні обчислення числа e .

