

Тема 4.

Числові послідовності. Границі числових послідовностей

Урок 18–19. Границі послідовностей, пов'язані з числами Фібоначчі і Люка

План уроку

1. Послідовність Фібоначчі. Послідовність Люка.
2. Границі послідовностей, пов'язані з числами Фібоначчі і Люка.

Очікувані результати навчальних досягнень

Учень/учениця:

досліджує специфічну проблемну ситуацію, використовуючи різноманітні інформаційні джерела [12 МАО 1.2.1–1 П];

визначає межі даних, формулює припущення щодо даних у специфічних проблемних ситуаціях [12 МАО 1.2.3–1 П];

визначає, яких даних недостатньо чи є надлишкові дані, під час розв'язання специфічної проблемної ситуації [12 МАО 3.1.2–1 П];

добирає доцільні математичні поняття, факти і послідовність дій для розв'язання проблемних ситуацій [12 МАО 4.2.1–1 П].

Дружні поради вчителю/вчительці до уроку

- 1) Урок розрахований на дві академічні години.
- 2) Сформулюйте учням/ученицям мотиваційні запитання щодо матеріалу уроку.
- 3) Запропонуйте учням/ученицям, на ваш вибір, завдання на повторення вивченого. Повторіть послідовності Фібоначчі та Люка.
- 4) Теорію подавайте стисло, акцентуйте увагу (коли можливо) на її практичному застосуванні.
- 5) До теоретичних тверджень наведено ілюстративні задачі. Обирайте ілюстративні задачі на власний розсуд.
- 6) Обирайте кількість та зміст матеріалу на власний розсуд.

- 7) Обов'язково пропонуйте учням/ученицям самотужки або в групах розв'язувати тренувальні завдання за трьома рівнями складності, на вибір учня/учениці.
- 8) Мотивуйте учнів/учениць до проєктної діяльності. Запропонуйте учням/ученицям обрати теми для індивідуальних (групових) проєктів.
- 9) Темами проєктів можуть бути практичні завдання за рівнями складності В або С. Якщо учень/учениця розв'язали завдання рівня А, то для проєкту вони можуть обрати рівні В або С. Можливі теми для створення проєктів запропоновані.
- 10) Запропонуйте учням/ученицям дати відповіді на запитання для рефлексії.

I. Організаційна частина (2 хв)

Мотиваційні запитання

- 1) Чи пов'язані між собою послідовності Фібоначчі та Люка?
- 2) Чим відрізняються між собою послідовності Фібоначчі та Люка?
- 3) Чи існує певне число, до якого наближаються усі члени послідовності Фібоначчі?
- 4) Чи існує певне число, до якого наближаються усі члени послідовності Люка?
- 5) Чи важливо в аналізі вивчати границі «конкретних» послідовностей?

II. Повторення (5–10 хв)

1. Запишіть перші 8 членів послідовності Фібоначчі.
Відповідь. 0; 1; 1; 2; 3; 5; 8; 13.
2. Порівняйте F_{11} і 3^4 , де (F_n) — послідовність Фібоначчі.
Відповідь. $F_{11} > 3^4$.
3. Обчисліть L_6 та L_8 , де (L_n) — послідовність Люка.
Відповідь. $L_6 = 18$; $L_8 = 47$.
4. Знайдіть відношення: $\frac{L_n}{F_n}$ для $n = 3$, $n = 4$, $n = 5$, $n = 6$.
Відповідь. 2 ; $\frac{7}{3}$; $\frac{11}{5}$; $\frac{9}{4}$.
5. Обчисліть: $\frac{F_{n+1}}{F_n}$, $\frac{L_{n+1}}{L_n}$ для $n = 4$, $n = 5$, $n = 6$, $n = 7$.
Відповідь. $\frac{F_5}{F_4} = \frac{5}{3}$, $\frac{L_5}{L_4} = \frac{11}{7}$; $\frac{F_6}{F_5} = \frac{8}{5}$, $\frac{L_6}{L_5} = \frac{18}{11}$; $\frac{F_7}{F_6} = \frac{13}{8}$, $\frac{L_7}{L_6} = \frac{29}{18}$; $\frac{F_8}{F_7} = \frac{21}{13}$, $\frac{L_8}{L_7} = \frac{47}{29}$.

III. Послідовність Фібоначчі. Послідовність Люка

Пригадаємо важливі означення.

Означення. Числа Фібоначчі — це члени послідовності $\{F_n, n \geq 0\}$, яка задається рівностями $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$, $n \in \mathbb{N}$.

Загальний член послідовності $\{F_n, n \geq 0\}$ задається формулою Біне: $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha_1^n - \alpha_2^n)$,

де α_1 і α_2 — корені квадратного рівняння $z^2 - z - 1 = 0$ і $\alpha_1 > \alpha_2$.

$$\alpha_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1,61803; \alpha_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} = -0,61803.$$

Означення. Числа Люка — це члени послідовності $\{L_n, n \geq 0\}$, яка задається рівностями: $L_0 = 2$, $L_1 = 1$, $L_{n+1} = L_n + L_{n-1}$, $n \in \mathbb{N}$.

Загальний член послідовності $\{L_n, n \geq 0\}$ задається формулою $L_n = \alpha_1^n + \alpha_2^n$, де α_1 і α_2 — корені квадратного рівняння $z^2 - z - 1 = 0$ і $\alpha_1 > \alpha_2$.

$$\alpha_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1,61803; \alpha_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} = -0,61803.$$

У таблиці наведено декілька перших чисел Фібоначчі і Люка.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
F_n	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377	610
L_n	2	1	3	4	7	11	18	29	47	76	123	199	322	521	843	1364

IV. Границі послідовностей, пов'язані з числами Фібоначчі і Люка

Замість запису $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ будемо писати $\lim a_n$. Це не викличе непорозумінь, оскільки всюди n прямує до ∞ .

Означення. Послідовність $\{a_n\}$ **прямує до нескінченності** ($\lim a_n = \infty$), якщо для будь-якого дійсного числа M існує номер n_0 такий, що при $n > n_0$ $a_n > M$.

Наприклад, $\lim n = \infty$ або $\lim a^n = \infty$ при $a > 1$.

Відомо, що $\lim a^n = 0$, якщо $|a| < 1$. Отже, $\lim \alpha_2^n = 0$, бо $|\alpha_2| = \left| \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right| < 1$.

Крім того, $\lim \alpha_1^n = \infty$, бо $\alpha_1 > 1$.

Властивості границь

Теорема 1. Якщо для послідовності $\{a_n\}$ виконується умова $\lim \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = q < 1$, то $\lim a_n = 0$.

Теорема 2. Якщо $\alpha_n \geq -1$, $n \in \mathbb{N}$ і $\lim \alpha_n = 0$, то $\lim \sqrt[k]{1 + \alpha_n} = 1$, $k \in \mathbb{N}$, $k > 1$.

Теорема 3. Якщо $a > 1$, то $\lim \sqrt[n]{a} = 1$.

Ілюстративні приклади

6. Обчисліть границі:

1) $\lim F_n$;

2) $\lim L_n$.

Розв'язання. 1) $\lim F_n = \lim \frac{\alpha_1^n - \alpha_2^n}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}} (\lim \alpha_1^n - \lim \alpha_2^n) = \frac{1}{\sqrt{5}} (\infty - 0)$.

Отже, $\lim F_n = \infty$.

2) $\lim L_n = \lim (\alpha_1^n + \alpha_2^n) = \lim \alpha_1^n + \lim \alpha_2^n = \infty + 0$.

Отже, $\lim L_n = \infty$.

Відповідь. 1) ∞ ; 2) ∞ .

7. Обчисліть границю $A = \lim \frac{F_{n+1}}{F_n}$.

Розв'язання. $A = \lim \left(\frac{\alpha_1^{n+1} - \alpha_2^{n+1}}{\sqrt{5}} : \frac{\alpha_1^n - \alpha_2^n}{\sqrt{5}} \right) = \lim \frac{\alpha_1^{n+1} - \alpha_2^{n+1}}{\alpha_1^n - \alpha_2^n}$.

Поділимо чисельник і знаменник дробу на α_1^n : $A = \lim \frac{\alpha_1 - \alpha_2 \cdot \left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1} \right)^n}{1 - \lim \left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1} \right)^n}$.

Оскільки $\left| \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \right| = \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1} < 1$, то $\lim \left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1} \right)^n = 0$. Отже, $A = \frac{\alpha_1 - \alpha_2 \cdot 0}{1 - 0} = \alpha_1$.

Відповідь. α_1 .

8. Обчисліть границю $A = \lim \frac{L_{n+1}}{L_n}$.

Розв'язання. $A = \lim \frac{\alpha_1^{n+1} + \alpha_2^{n+1}}{\alpha_1^n + \alpha_2^n} = \lim \frac{\alpha_1 + \alpha_2 \cdot \left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1} \right)^n}{1 + \left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1} \right)^n} = \frac{\alpha_1 + \alpha_2 \cdot 0}{1 + 0} = \alpha_1$.

Відповідь. α_1 .

9. Обчисліть границю $A = \lim \frac{\alpha_2^{n+p}}{\alpha_1^{n+q}}$ (p і q фіксовані цілі числа).

Розв'язання. $A = \lim \frac{\alpha_2^p}{\alpha_1^q} \cdot \lim \left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1} \right)^n = \frac{\alpha_2^p}{\alpha_1^q} \cdot 0 = 0$.

Відповідь. 0.

10. Обчисліть границю $A = \lim \frac{F_{n+p}}{F_n}$.

$$\text{Розв'язання. } A = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha_1^{n+p} - \alpha_2^{n+p}}{\alpha_1^n - \alpha_2^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha_1^p - \frac{\alpha_2^{n+p}}{\alpha_1^n}}{\alpha_1 - \left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)^n} = \frac{\alpha_1^p - 0}{1 - 0} = \alpha_1^p.$$

Відповідь. α_1^p .

11. Обчисліть границю:

$$1) \lim \frac{F_{n+p}}{F_{n+q}}; \quad 2) \lim \frac{F_{n+p}}{L_{n+q}}.$$

$$\text{Розв'язання. 1) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{n+p}}{F_{n+q}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha_1^{n+p} - \alpha_2^{n+p}}{\alpha_1^{n+q} - \alpha_2^{n+q}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha_1^p - \alpha_2^p \left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1} \right)^n}{\alpha_1^q - \alpha_2^q \left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1} \right)^n} = \frac{\alpha_1^p - \alpha_2^p \cdot 0}{\alpha_1^q - \alpha_2^q \cdot 0} = \alpha_1^{p-q}.$$

$$2) \lim \frac{F_{n+p}}{L_{n+q}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \lim \frac{\alpha_1^{n+p} - \alpha_2^{n+p}}{\alpha_1^{n+q} + \alpha_2^{n+q}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \lim \frac{\alpha_1^p - \alpha_2^p \left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1} \right)^n}{\alpha_1^q - \alpha_2^q \left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1} \right)^n} = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\alpha_1^p - \alpha_2^p \cdot 0}{\alpha_1^q - \alpha_2^q \cdot 0} = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \alpha_1^{p-q}.$$

Відповідь. 1) α_1^{p-q} ; 2) $\frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \alpha_1^{p-q}$.

12. Обчисліть границю $A = \lim \frac{F_1 + F_2 + \dots + F_n}{L_1 + L_2 + \dots + L_n}$.

Розв'язання. $F_1 + F_2 + F_3 + \dots + F_n = (F_3 - F_2) + (F_4 - F_3) + (F_5 - F_4) + \dots + (F_{n+2} - F_{n+1}) = F_{n+2} - F_2 = F_{n+2} - 1$.

Аналогічно $L_1 + L_2 + L_3 + \dots + L_n = L_{n+2} - L_2 = L_{n+2} - 3$.

$$\begin{aligned} \text{Отже, } A &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{n+2} - 1}{L_{n+2} - 3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha_1^{n+2} - \alpha_2^{n+2}) - 1}{\alpha_1^{n+2} + \alpha_2^{n+2} - 3} = \frac{1}{\sqrt{5}} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha_1^{n+2} - \alpha_2^{n+2} - \sqrt{5}}{\alpha_1^{n+2} + \alpha_2^{n+2} - 3} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)^{n+2} - \frac{\sqrt{5}}{\alpha_1^{n+2}}}{1 + \left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)^{n+2} - \frac{3}{\alpha_1^{n+2}}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{1 - 0 - 0}{1 + 0 - 0} = \frac{1}{\sqrt{5}}. \end{aligned}$$

Відповідь. $\frac{1}{\sqrt{5}}$.

13. Обчисліть границю $A = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=1}^n L_k$.

Розв’язання. $A = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{L_{n+2} - 3}{n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{L_{n+2}}{n!} - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{n!} = 0 - 0 = 0$.

Відповідь. 0.

14. Обчисліть границю $A = \lim \sqrt[n]{F_n + L_n}$.

Розв'язання. $2F_n < F_n + L_n < 2L_n$ при $n > 1$. Отже, $\sqrt[n]{2F_n} < \sqrt[n]{F_n + L_n} < \sqrt[n]{2L_n}$;
 $\lim \sqrt[n]{2F_n} \leq A \leq \lim \sqrt[n]{2L_n}$.

Таким чином: $\lim \sqrt[n]{2} = 1$ і $\lim \sqrt[n]{F_n} \leq A \leq \lim \sqrt[n]{L_n}$, за теоремою 3.

Оскільки $\lim \sqrt[n]{F_n} = \lim \sqrt[n]{L_n} = \alpha_1$, то за теоремою про двох конвоїрів $A = \alpha_1$.

Відповідь. α_1 .

V. Тренувальні вправи. Три рівні складності: А, В, С

Рівень А

1. Обчисліть границю:

1) $\lim \frac{L_{n+p}}{L_n}$; 2) $\lim \frac{F_n}{F_{n+p}}$; 3) $\lim \frac{L_n}{L_{n+p}}$; 4) $\lim \frac{L_{n+p}}{L_{n+q}}$.

2. Обчисліть границю:

1) $\lim \frac{\alpha_1^{n+p}}{\alpha_1^{n+q}}$; 2) $\lim \frac{F_{n+p}}{L_{n+q} + L_n}$.

3. Обчисліть границю:

1) $\lim \frac{5F_{n+1} + 2F_n}{3F_{n+2} + 4F_{n+6}}$; 2) $\lim \frac{2F_{n+3} + 3F_{n+5}}{4F_n - 2F_{n+1}}$.

4. Доведіть тотожність:

1) $\lim \frac{2L_{n+1} + 4L_n}{3L_{n+2} - 2L_{n+1}} = \frac{2(5 + \sqrt{5})}{7 + \sqrt{5}}$; 2) $\lim \frac{5L_{n+2} - 3L_{n+1}}{3L_n + 2L_{n+3}} = \frac{6 + \sqrt{5}}{7 + 2\sqrt{5}}$.

5. Обчисліть границю:

1) $\lim \frac{5F_n + 4F_{n+2}}{3L_{n+1} + 2L_{n+3}}$; 2) $\lim \frac{2F_{n+2} - 4F_n}{L_{n+1} + 3L_{n+3}}$.

Рівень В

1. Доведіть тотожність:

1) $\lim \frac{3F_{n+2} + 3L_n + 2}{F_{n+3} + 2L_{n+4} - 1} = \frac{9(1 + \sqrt{5})}{2(17 + 8\sqrt{5})}$; 2) $\lim \frac{2F_{n+1} - 3L_{n+2}}{3F_n + 4L_{n+3}} = -\frac{17 + 7\sqrt{5}}{2(23 + 8\sqrt{5})}$.

2. Обчисліть границю $\lim \frac{F_{n+q} \cdot F_{n+s} \cdot F_{n+t}}{F_{n+r} \cdot F_{n+p} \cdot F_{n+m}}$.

3. Доведіть тотожність $\lim \frac{L_{n+q} \cdot L_{n+s} \cdot L_{n+t}}{L_{n+p} \cdot L_{n+r} \cdot L_{n+m}} = \alpha_1^{q+s+t-p-r-m}$.

4. Обчисліть границю:

1) $\lim \frac{F_{n+2} \cdot F_{n+4}}{F_{n+3} \cdot F_{n+5}}$; 2) $\lim \frac{L_{n+1} \cdot L_{n+6}}{L_n \cdot L_{n+3}}$; 3) $\lim \frac{F_{n+3} \cdot L_{n+2}}{F_{n+4} \cdot L_{n+5}}$.

5. Обчисліть границю $A = \lim \frac{F_{n+k}}{n!}$.

Рівень С

1. Доведіть, що $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=1}^n F_k = 0$.
2. Доведіть, що $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k}{L_{pn}} = 0$.
3. Доведіть, що:
 - 1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k}{L_{p+n}} = 0$;
 - 2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k}{F_{n+k}} = 0$.
4. Доведіть, що:
 - 1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^5 + 2n^4 + 3n^3 + 2n^2 + n}{L_n} = 0$;
 - 2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^4 - 2n^3 + 4n^2 - 2n + 10}{F_n} = 0$.
5. Доведіть, що $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{F_n} \sum_{k=1}^p n^k = 0$.
- 6*. Доведіть, що $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{pF_n + qL_n} = \alpha_1$ (p і q — натуральні числа).
- 7*. Доведіть тотожність:
 - 1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{F_n + L_{n+2} + L_{n+2}} = \alpha_1$;
 - 2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{L_1 + L_2 + \dots + L_n} = \alpha_1$;
 - 3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{F_1 + F_2 + \dots + F_n} = \alpha_1$.

VI. Рефлексія (1–2 хв)

- 1) Сьогодні я дізнався/дізналась, що
- 2) Цей урок допоміг мені зрозуміти, що
- 3) Під час уроку я зрозумів/зрозуміла, що вже вмію
- 4) Найскладнішим для мене було
- 5) Тепер я впевнений/упевнена у своїй здатності
- 6) Найбільше мені сподобалося

Можливі теми проєктів

1. Числа Фібоначчі та їх границі.
2. Числа Люка та їх границі
3. Золотий переріз і границі послідовностей.
4. Комп'ютерні експерименти із послідовностями.

Список використаної літератури

- 1) Мерзляк А. Г. Алгебра і початки аналізу : початок вивчення на поглиб. рівні з 8 кл., проф. рівень : підручн. для 10 кл. закладів загальної середньої освіти / А. Г. Мерзляк, Д. А. Номіровський, В. Б. Полонський, М. С. Якір. — Х. : Гімназія, 2018.
- 2) Мерзляк А. Г. Вчимося розв'язувати задачі з початків аналізу (навчально-методичний посібник) / А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонський, М. М. Рабінович, М. С. Якір. — Т.: Підручники & посібники, 2003.
- 3) Славич Л. Є. Матеріали до теми «Границя та неперервність». Алгебра і початки аналізу. 10 клас. / Л. Є. Славич, Н. Л. Смик // Науково-методичний журнал «Математика в школах
- 4) Ушаков Р. П. Границя числової послідовності в задачах. / Р. П. Ушаков // Науково-методичний журнал «Математика в школах України» — 2007 рік, №31(187).