

Тема 4.

Числові послідовності. Границі числових послідовностей

Урок 2. Арифметична прогресія. Геометрична прогресія

План уроку

1. Арифметична прогресія. Сума перших n членів арифметичної прогресії.
2. Геометрична прогресія. Сума перших n членів геометричної прогресії.

Очікувані результати навчальних досягнень

Учень/учениця:

досліджує специфічну проблемну ситуацію, використовуючи різноманітні інформаційні джерела [12 МАО 1.2.1–1 П];

визначає, яких даних недостатньо чи є надлишкові дані, під час розв'язання специфічної проблемної ситуації [12 МАО 3.1.2–1 П];

добирає доцільні математичні поняття, факти і послідовність дій для розв'язання проблемних ситуацій [12 МАО 4.2.1–1 П].

Дружні поради вчителю/вчительці до уроку

- 1) Сформулюйте учням/ученицям мотиваційні запитання щодо матеріалу уроку.
- 2) Запропонуйте учням/ученицям, на ваш вибір, завдання на повторення вивченого.
- 3) Сформулюйте практичну задачу (без розв'язання). Розв'язання пропонуємо у вигляді групової роботи наприкінці уроку.
- 4) Теорію подавайте стисло, акцентуйте увагу (коли можливо) на її практичному застосуванні.
- 5) До теоретичних тверджень наведено ілюстративні задачі. Обирайте ілюстративні задачі на власний розсуд.
- 6) Увесь запропонований матеріал неможливо подати в часових вимірах одного уроку, тому обирайте кількість матеріалу на власний розсуд.

7) Заплануйте розв'язання практичної задачі. Об'єднайте учнів/учениць у кілька груп. Під час розв'язання задачі групами важливо формувати комунікаційні навички, інтегрувати здобуті знання у розв'язання практичних задач.

8) Обов'язково пропонуйте учням/ученицям самотужки або в групах розв'язувати тренувальні завдання за трьома рівнями складності, на вибір учня/учениці. Формуйте навички розв'язання прикладів та задач і навчайте учнів/учениць самостійної роботи над завданнями.

9) Мотивуйте учнів/учениць до проєктної діяльності. Запропонуйте учням/ученицям обрати теми для індивідуальних (групових) проєктів. Робота над обраним проєктом може тривати впродовж вивчення всієї змістової теми. Створення проєктів та їхній захист можуть бути альтернативою контрольної роботи з теми.

10) Можливі теми для створення проєктів запропоновані. Також темами проєктів можуть бути практичні завдання за рівнями складності В або С.

I. Організаційна частина (2 хв)

Мотиваційні запитання

1) Чи правда, що послідовності кількості кроків, які ми робимо щодня, можуть бути закономірними?

2) Чи можна швидко обчислити загальну суму грошей через 4 тижні, якщо щодня відкладати на 10 грн більше, ніж учора?

3) Чому спортсмени планують тренування, поступово збільшуючи навантаження?

4) Чи розраховують у банківській сфері відсотки, що «ростуть» з кожним місяцем?

5) Що буде доцільніше: отримувати щодня по 100 грн чи почати з 1 грн і подвоювати щодня?

II. Повторення (3–4 хв)

1. Ціна товару збільшилася з 600 грн до 750 грн. На скільки відсотків зросла сума?

А	Б	В	Г	Д
10%	15%	20%	25%	30%

Відповідь. Г.

2. Розв'яжіть рівняння: $5x - 7 = 13$.

А	Б	В	Г	Д
2	3	4	5	6

Відповідь. В.

3. Знайдіть п'ятий член послідовності, заданої формулою $a_n = 3n + 2$.

А	Б	В	Г	Д
11	15	17	19	21

Відповідь. В.

4. Яка з наведених формул задає n -й член даної послідовності: 4, 8, 12, 16, ... ?

А	Б	В	Г	Д
$a_n = 4n$	$a_n = 4n - 4$	$a_n = 4 + n$	$a_n = 4n + 4$	$a_n = 4 - n$

Відповідь. А.

5. Знайдіть середнє арифметичне довжин усіх сторін трикутника, периметр якого дорівнює 27,3 см.

Відповідь. 9,1.

Як я вирішую певну проблему?

Задача. На рисунку зображено фрагмент поперечного перерізу стосу дерев'яних колод. У нижньому ряду стосу 13 колод, а у верхньому — одна колода. Визначте загальну кількість колод у цьому стосі.



III. Арифметична прогресія. Сума перших n членів арифметичної прогресії

Означення. *Арифметичною прогресією* називають послідовність, кожний член якої, починаючи з другого, дорівнює попередньому члену, до якого додано одне й те саме число.

При цьому, число, про яке йдеться в означенні, дорівнює різниці наступного й попереднього членів послідовності. Його називають *різницею арифметичної прогресії* та позначають буквою d (*differentia* – різниця).

Розглянемо формули для арифметичної прогресії (a_n) із різницею d .

Рекурентна формула	$a_1 = a, a_{n+1} = a_n + d, n \in \mathbb{N}.$
Формула n-го члена	$a_n = a_1 + d(n-1), n \in \mathbb{N}.$ $a_n = a_k + d(n-k), n \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{N}, n > k.$
Формули суми n перших членів	$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n, n \in \mathbb{N}.$ $S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n, n \in \mathbb{N}.$
Властивості	$a_n = \frac{a_{n+1} + a_{n-1}}{2}, n \in \mathbb{N}, n > 1.$ $a_n = \frac{a_{n+k} + a_{n-k}}{2}, n \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{N}, n > k.$ $a_m + a_n = a_k + a_p, m \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{N}, p \in \mathbb{N}, m + n = k + p.$

Теорема. Послідовність, яка містить більше двох членів, є арифметичною прогресією тоді й тільки тоді, коли кожний її член, крім першого (і останнього, якщо послідовність скінченна), дорівнює середньому арифметичному двох сусідніх із ним членів.

Ілюстративні приклади

6. Скільки від'ємних чисел містить арифметична прогресія: $-28; -25; -22; \dots$?

Розв'язання. 1) Нехай (a_n) — дана арифметична прогресія і $a_1 = -28$, $d = 3$, a_n — останній від'ємний член прогресії.

2) Тоді за формулою n -го члена прогресії $a_n = a_1 + d(n - 1)$, складемо та розв'яжемо нерівність: $-28 + 3(n - 1) < 0$; $n < \frac{31}{3}$; $n < 10\frac{1}{3}$. Звідси $n = 10$.

Відповідь. 10.

7. Четвертий член арифметичної прогресії дорівнює 9, дев'ятий член дорівнює -6 . Скільки потрібно взяти членів, щоб їхня сума дорівнювала 54 ?

Розв'язання. 1) Нехай (a_n) — дана арифметична прогресія.

За умовою, $\begin{cases} a_1 + 3d = 9, \\ a_1 + 8d = -6. \end{cases}$ Звідси $d = -3$, $a_1 = 18$.

$$2) S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n = \frac{2 \cdot 18 + (n-1)(-3)}{2} n = 54.$$

3) Тоді $n^2 - 13n + 36 = 0$, звідси $n_1 = 4$, $n_2 = 9$. Обидва корені рівняння задовольняють умову задачі.

Відповідь. 4; 9.

8. Знайдіть суму всіх трицифрових чисел, кратних 9, які не більші за 1000.

Розв'язання. 1) Маємо арифметичну прогресію, в якій $a_1 = 108$ — найменше трицифрове число, кратне 9 та $a_n = 999$ — найбільше трицифрове число, яке кратне 9.

2) Знайдемо кількість членів цієї прогресії. $a_n = a_1 + d(n - 1)$; $108 = (n - 1)9 = 999$; $n = 100$.

$$3) \text{Таким чином } S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{108 + 999}{2} \cdot 100 = 55350.$$

Відповідь. 55350.

IV. Геометрична прогресія. Сума перших n членів геометричної прогресії

Означення. Геометричною прогресією називають послідовність, перший член якої відмінний від нуля, а кожний член, починаючи з другого, дорівнює попередньому члену, помноженому на одне й те саме відмінне від нуля число.

При цьому число, про яке йдеться в означенні, дорівнює відношенню наступного й попереднього членів послідовності. Його називають **знаменником геометричної прогресії** та позначають буквою q (*quotient* — частка).

Розглянемо формули для геометричної прогресії (b_n) зі знаменником q .

Рекурентна формула	$b_1 = b, b_{n+1} = b_n q, n \in \mathbb{N}.$
Формула n-го члена	$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}, n \in \mathbb{N}.$ $b_n = b_k \cdot q^{n-k}, n \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{N}, n > k.$
Формула суми n перших членів	$S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1}, n \in \mathbb{N}, q \neq 1.$
Властивості	$b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}, n \in \mathbb{N}, n > 1.$ $b_n^2 = b_{n-k} \cdot b_{n+k}, n \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{N}, n > k.$ $b_m \cdot b_n = b_k \cdot b_p, m \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{N}, p \in \mathbb{N}, m + n = k + p.$

Теорема. Послідовність (b_n) , яка містить більше двох членів і всі члени якої відмінні від нуля, є геометричною прогресією тоді й тільки тоді, коли для будь-якого натурального $n > 1$ виконується рівність $b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}$.

Ілюстративні приклади

- 9.** Знайдіть четвертий член і знаменник геометричної прогресії (b_n) , якщо $b_3 = 36$, $b_5 = 49$.

Розв'язання. 1) За властивістю геометричної прогресії $b_4^2 = b_3 b_5$, звідси

$$b_4 = \pm \sqrt{b_3 b_5} = \pm \sqrt{36 \cdot 49} = \pm 42.$$

$$2) \text{ Якщо } b_4 = 42, \text{ то знаменник прогресії } q = b_4 : b_3 = \frac{42}{36} = \frac{7}{6};$$

$$\text{якщо } b_4 = -42, \text{ то } q = -\frac{7}{6}.$$

$$\text{Відповідь. } b_4 = 42, q = \frac{7}{6} \text{ або } b_4 = -42, q = -\frac{7}{6}.$$

- 10.** Перетворіть періодичний дріб $1,7(5)$ у звичайний дріб.

$$\text{Розв'язання. 1) Оскільки } 1,7(5) = 1,7555\dots, \text{ то } 1 + \frac{7}{10} + \frac{5}{100} + \frac{5}{1000} + \frac{5}{10000} + \dots =$$

$$= \frac{17}{10} + \frac{\frac{5}{100}}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{17}{10} + \frac{1}{18} = \frac{79}{45}.$$

$$\text{Відповідь. } \frac{79}{45}.$$

- 11*.** Знайдіть усі трійки чисел, які утворюють геометричну прогресію та мають такі властивості: сума цих чисел дорівнює 63, а коли до цих чисел додати відповідно 7, 18 і 2, то буде отримано арифметичну прогресію.

Розв'язання. 1) Шукані числа запишемо так: a, aq, aq^2 . Тоді числа $a + 7, aq + 18, aq^2 + 2$ утворюють арифметичну прогресію.

$$2) \text{ Тоді } 2(aq + 18) = a + 7 + aq^2 + 2.$$

3) Враховуючи умову, отримуємо систему:

$$\begin{cases} a + aq + aq^2 = 63, \\ a + 7 + aq^2 + 2 = 2(aq + 18); \end{cases} \quad \begin{cases} a + aq + aq^2 = 63, \\ a - 2aq + aq^2 = 27. \end{cases}$$

4) Поділимо почленно ліві та праві частини рівнянь останньої системи:

$$\frac{a + aq + aq^2}{a - 2aq + aq^2} = \frac{63}{27}; \quad \frac{1 + q + q^2}{1 - 2q + q^2} = \frac{7}{3}.$$

Скориставшись властивістю пропорції, отримуємо: $4q^2 - 17q + 4 = 0$.

Таким чином: $q = \frac{1}{4}$ або $q = 4$.

5) Повертаючись до п.2 цієї задачі отримуємо, що якщо $q = \frac{1}{4}$, то $a = 48$, а також якщо $q = 4$, то $a = 3$.

6) Отже, можливі трійки чисел: 48, 12, 3 або 3, 12, 48.

Відповідь. 48, 12, 3 або 3, 12, 48.

V. Розв'язування практичної задачі. Групова активність

Як я вирішую певну проблему?

Задача. На рисунку зображено фрагмент поперечного перерізу стосу дерев'яних колод. У нижньому ряду стосу 13 колод, а у верхньому — одна колода. Визначте загальну кількість колод у цьому стосі.



Розв'язання. 1) Оскільки до кожного наступного ряду, починаючи з верхнього, завжди додається по одній колоді, то кількості колод у рядах утворюють арифметичну прогресію (a_n) .

2) Таким чином $a_1 = 1$, $a_{13} = 13$. Знайдемо S_{13} .

$$3) S_{13} = \frac{a_1 + a_{13}}{2} \cdot n = \frac{1 + 13}{2} \cdot 13 = 91.$$

Відповідь. 91.

VI. Тренувальні вправи. Три рівні складності: А, В, С (8–10 хв)

Рівень А

1. Чи є арифметичною прогресією послідовність:

1) 24, 22, 20, 18;

2) 16, 17, 19, 23;

3) -3, 2, 7, 12?

У разі ствердної відповіді вкажіть різницю прогресії.

2. Перший член арифметичної прогресії $a_1 = 17$, а різниця $d = -2$. Знайдіть:

1) a_4 ;

2) a_{15} ;

3) a_{60} .

3. Знайдіть перший член арифметичної прогресії (y_n) , якщо $y_{17} = 22$, а різниця прогресії $d = 0,5$.

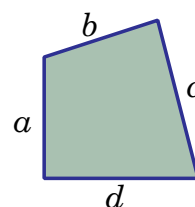
4. Знайдіть номер члена арифметичної прогресії 8,1; 8,5; 8,9; 9,3; ... , який дорівнює 13,7.

5. Восьмий і десятий члени арифметичної прогресії дорівнюють відповідно 3,5 і 2,7. Чому дорівнює дев'ятий член прогресії?

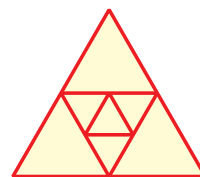
6. Чому дорівнює різниця арифметичної прогресії (x_n) , якщо $x_8 = 58$, $x_{15} = 16$?
7. Чи є послідовність (a_n) арифметичною прогресією, якщо її задано формулою n -го члена:
- 1) $a_n = 6 + 7n$; 2) $a_n = \frac{2n-1}{5}$; 3) $a_n = \frac{1}{n} + 2$?
- У разі ствердної відповіді вкажіть перший член і різницю прогресії.
8. Чому дорівнює сума шести перших членів арифметичної прогресії (b_n) , якщо $b_1 = 19$ і $b_6 = 14$?
9. Обчисліть суму двадцяти перших членів арифметичної прогресії $-8; -6; -4; \dots$.
10. Дмитро взяв у бібліотеці книжку. За перший день він прочитав 40 сторінок, а кожного наступного дня читав на 10 сторінок більше, ніж попереднього. Скільки сторінок у книжці, якщо Дмитро прочитав її за 7 днів?
11. Арифметичну прогресію (c_n) задано формулою n -го члена $c_n = 5n - 2$. Знайдіть суму двадцяти шести перших членів прогресії.
12. Знайдіть суму тридцяти трьох перших членів арифметичної прогресії (a_n) , якщо $a_3 + a_5 + a_{13} = 33$ і $a_{15} - a_8 - a_{10} = -1$.
13. Чому дорівнює сума n перших парних натуральних чисел?
14. У геометричній прогресії (c_n) перший член $c_1 = 9$, а знаменник $q = -1$. Знайдіть:
- 1) c_{21} ; 2) c_{50} .
15. Знайдіть знаменник і шостий член геометричної прогресії $18, 12, 8, \dots$.
16. Доведіть, що послідовність (x_n) , задана формулою n -го члена $x_n = 7n + 1$, є геометричною прогресією, та вкажіть її перший член і знаменник.
17. Послідовність (b_n) є геометричною прогресією. Знайдіть b_{20} , якщо $b_{19} = -3$, $b_{21} = -12$.
18. Знайдіть суму чотирьох перших членів геометричної прогресії:
- 1) $-0,6; 3; -15; \dots$; 2) $56; 42; 31,5; \dots$.

Рівень В

1. Знайдіть перший від'ємний член арифметичної прогресії $7,2; 6,6; 6; \dots$.
2. Які чотири числа треба вставити між числами 4 і -5 , щоб вони разом з даними числами утворювали арифметичну прогресію?
3. Знайдіть перший член і різницю арифметичної прогресії (a_n) , якщо:
- 1) $a_5 + a_{12} = 41$ і $a_{10} + a_{14} = 62$; 2) $a_7 + a_{13} = -104$ і $a_2 \cdot a_6 = -240$.
4. Доведіть, що для арифметичної прогресії (a_n) справедлива рівність
- $$a_n + a_k = a_{n-m} + a_{k+m}, \quad n > m.$$
5. Чи є правильним твердження: якщо довжини сторін опуклого чотирикутника (див. рисунок), узяті в послідовності a, b, d і c , утворюють арифметичну прогресію, то в цей чотирикутник можна вписати коло?
6. Величини кутів трикутника утворюють арифметичну прогресію. Яка градусна міра середнього за величиною кута трикутника?



7. Кожний член арифметичної прогресії помножили на 4. Чи буде утворена послідовність арифметичною прогресією?
8. При якому значенні x значення виразів $3x + 4$, $2x + 3$, x^2 і $2x^2 + x$ будуть послідовними членами арифметичної прогресії? Знайдіть члени цієї прогресії.
9. Знайдіть суму всіх додатних членів арифметичної прогресії 8,4; 7,8; 7,2; ...
10. Знайдіть суму всіх натуральних чисел, які кратні 12 і менші від 200.
11. Знайдіть перший член арифметичної прогресії, різниця якої дорівнює -4 , а сума дев'яти перших членів становить -54 .
12. Яку найменшу кількість послідовних непарних натуральних чисел, починаючи із числа 7, треба додати, щоб одержати суму, більшу за 315?
13. Розв'яжіть рівняння:
 1) $11 + 19 + 27 + \dots + (8n + 3) = 470$, де n — натуральне число;
 2) $1 + 5 + 9 + \dots + x = 630$, де x — натуральне число.
14. Третій член геометричної прогресії дорівнює 3. Знайдіть добуток п'яти перших членів цієї прогресії.
15. У правильний трикутник зі стороною a послідовно вписано трикутники так, що вершини кожного наступного трикутника є серединами сторін попереднього (див. рисунок). Доведіть, що периметри цих трикутників утворюють геометричну прогресію, і запишіть формулу n -го члена цієї прогресії.
16. Знайдіть перший член і знаменник геометричної прогресії (b_n) , якщо:
 1) $b_4 - b_2 = 30$ і $b_4 - b_3 = 24$; 2) $b_2 - b_5 = 78$ і $b_3 + b_4 + b_5 = -117$.
17. При якому значенні x значення виразів $x + 6$, $x + 2$ і $3x - 4$ будуть послідовними членами геометричної прогресії? Знайдіть члени цієї прогресії.
18. Для будь-якого натурального n суму n перших членів деякої геометричної прогресії можна обчислити за формулою $S_n = 6 \left(\left(-\frac{1}{2} \right)^n - 1 \right)$. Знайдіть четвертий член цієї прогресії.



Рівень С

1. Дано арифметичну прогресію (a_n) , у якій $a_k = m$, $a_m = k$ ($m \neq k$). Знайдіть a_{k+m} .
2. Доведіть, що коли додатні числа a , b і c три послідовних члени арифметичної прогресії, то $\frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} + \frac{1}{\sqrt{b} + \sqrt{c}} = \frac{2}{\sqrt{a} + \sqrt{c}}$.
3. Доведіть, що коли значення виразів $\frac{1}{b+c}$, $\frac{1}{a+c}$ і $\frac{1}{a+b}$ є послідовними членами арифметичної прогресії, то значення виразів a^2 , b^2 і c^2 також є послідовними членами арифметичної прогресії.
4. Знайдіть усі арифметичні прогресії з різницею 10, які складаються з простих чисел і мають не менше трьох членів.
- 5*. Доведіть, що в нескінченній арифметичній прогресії, яка складається з натуральних чисел, знайдуться два члени, які мають однакову суму цифр.

- 6*.** Доведіть, що арифметична прогресія (a_n) , де $a_n = 3n + 2$, містить безліч простих чисел.
- 7*.** Чи існує нестационарна нескінченна арифметична прогресія, яка складається з простих чисел?
- 8.** *Задача Гіпсикла Александрійського.* Доведіть, що в арифметичній прогресії з парною кількістю членів, яка складається із цілих чисел, сума другої половини більша за суму першої половини на число, яке кратне квадрату половини кількості членів.
- 9.** Доведіть, що коли для будь-якого натурального n суму n перших членів послідовності можна обчислити за формулою $S_n = n^2 - 3n + 4$, то ця послідовність не є арифметичною прогресією.
- 10.** Знайдіть суму всіх двоцифрових чисел, які не діляться націло ні на 3, ні на 5.
- 11.** В арифметичній прогресії $S_m = S_n$, $m \neq n$. Знайдіть S_{m+n} .
- 12.** У скінченній арифметичній прогресії кількість членів є непарною. Сума членів, які стоять на місцях з парними номерами, дорівнює сумі членів, які стоять на місцях з непарними номерами. Знайдіть суму всіх членів цієї прогресії.
- 13*.** У баскетбольному турнірі, який проходив в одне коло, брали участь n команд. Після закінчення турніру виявилось, що очки, набрані командами, утворюють нестационарну арифметичну прогресію. Скільки очок набрала команда, яка посіла останнє місце, якщо за перемогу в кожній зустрічі команда отримувала 2 очки, за поразку очки не нараховувались, а нічий у баскетболі немає?
- 14.** Дано три числа, які утворюють геометричну прогресію. Їхня сума дорівнює 65. Якщо від першого із цих чисел відняти 1, друге залишити без змін, а від третього відняти 19, то отримані числа утворять арифметичну прогресію. Знайдіть дані числа.
- 15.** Знайдіть суму $\left(2 + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(4 + \frac{1}{4}\right)^2 + \dots + \left(2^n + \frac{1}{2^n}\right)^2$.
- 16.** Знайдіть кількість членів скінченної геометричної прогресії, знаменник якої $q = -\frac{1}{2}$, перший член $b_1 = 256$, а сума всіх членів $S_n = 170$.

VII. Рефлексія (2 хв)

- | | | | |
|-----------|--|------------------------|----|
| 1. | Я розумію, що таке арифметична прогресія. | | |
| | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 2. | Я можу визначити різницю арифметичної прогресії. | | |
| | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 3. | Я знаю, як знайти будь-який член арифметичної прогресії за його номером. | | |
| | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 4. | Я розумію, що таке геометрична прогресія. | | |
| | Так | Ще треба потренуватися | Ні |

- | | | | |
|------------|--|------------------------|----|
| 5. | Я можу визначити знаменник геометричної прогресії. | | |
| | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 6. | Я вмю знаходити n -й член геометричної прогресії. | | |
| | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 7. | Я можу знайти суму n перших членів арифметичної прогресії. | | |
| | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 8. | Я можу знайти суму n перших членів геометричної прогресії. | | |
| | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 9. | Я можу розв'язати текстову задачу, пов'язану з арифметичною або геометричною прогресією. | | |
| | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 10. | Я можу пояснити, як здобути знання можна використати в практичних потребах. | | |
| | Так | Ще треба потренуватися | Ні |

Можливі теми проєктів

1. Дослідження властивостей арифметичних прогресій із заданими умовами.
2. Геометрична прогресія з від'ємним знаменником: властивості, графічна інтерпретація, застосування.
3. Гармонічна прогресія та її властивості.
4. Побудова математичних задач, що базуються на властивостях прогресій, та їхня класифікація.
5. Історичний аналіз розвитку поняття прогресії від стародавніх часів до сучасної математики.

Список використаної літератури

- 1) Ключко І. Я. Державна підсумкова атестація. 9 клас. Математика: Алгебра / І. Я. Ключко. – Тернопіль: Навчальна книга – Богдан, 2022.
- 2) Мерзляк А. Г. Алгебра для загальноосвітніх навчальних закладів з поглибленим вивченням математики : підручн. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закладів / А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонський, М. С. Якір. – Х. : Гімназія, 2017.
- 3) Мерзляк А. Г. Алгебра і початки аналізу : підручн. для 10 кл. з поглибленим вивченням математики / А. Г. Мерзляк, Д. А. Номіровський, В. Б. Полонський, М. С. Якір. – Х. : Гімназія, 2010.
- 4) Мерзляк А. Г. Алгебра і початки аналізу : початок вивчення на поглиб. рівні з 8 кл., проф. рівень : підручн. для 10 кл. закладів загальної середньої освіти / А. Г. Мерзляк, Д. А. Номіровський, В. Б. Полонський, М. С. Якір. – Х. : Гімназія, 2018.