

Тема 4.

Числові послідовності.

Границі числових послідовностей

Урок 3. Уявлення про границю числової послідовності. Сума нескінченної геометричної прогресії, модуль знаменника якої менший від 1

РОБОЧИЙ АРКУШ

(моє ім'я)

I. Очікувані результати навчальних досягнень

На уроці ви навчитеся:

- 1) визначати, чи існує границя даної послідовності;
- 2) знаходити границі простих числових послідовностей;
- 3) пояснювати поведінку членів послідовності при зростанні номера;
- 4) розпізнавати геометричну прогресію та визначати її знаменник;
- 5) знаходити суму нескінченної геометричної прогресії, за формулою при $|q| < 1$;
- 6) аналізувати вплив модуля знаменника на збіжність прогресії;
- 7) застосовувати знання про границю та суму прогресії для розв'язання практичних задач.

II. Повторення

1. Виконайте піднесення до степеня: $\left(-\frac{m^5}{2}\right)^2$.

А	Б	В	Г	Д
$-2,5m^{10}$	$-0,25m^7$	$0,25m^{10}$	$2,5m^7$	$-0,25m^{10}$

2. Обчисліть: $\left(\frac{1}{2}\right)^4 + \left(\frac{1}{2}\right)^5$.

А	Б	В	Г	Д
$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{3}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{1}{4}$

3. Яке з наведених чисел є членом геометричної прогресії 1, 8, 64, ...? (Пробне ЗНО, 2012 р.).

А	Б	В	Г	Д
2^8	2^{11}	2^{14}	2^{18}	2^{23}

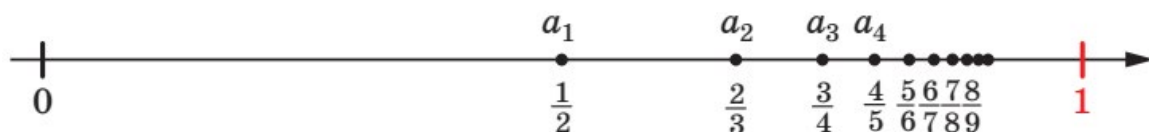
4. Знайдіть знаменник геометричної прогресії (c_n) , якщо $c_1 = 100$ і $c_6 = 24300$.

А	Б	В	Г	Д
0,00243	24,3	0,3	3	243

5. Відомо, що $y + \frac{1}{y} = 6$. Знайдіть $y^2 + \frac{1}{y^2}$.

III. Уявлення про границю послідовності

Розглянемо послідовність (a_n) , задану формулою n -го члена $a_n = \frac{n}{n+1}$. Випишемо кілька перших членів цієї послідовності: $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{6}{7}, \frac{7}{8}, \frac{8}{9}, \dots$. Якщо члени цієї послідовності зображати точками на координатній прямій, то ці точки будуть розміщатися все ближче й ближче до точки з координатою 1 (див. рисунок).



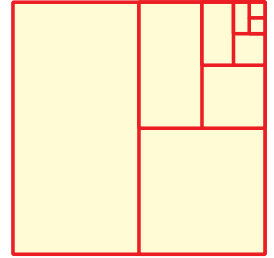
Говорять, що зі збільшенням номера n члени послідовності (a_n) прямують до числа 1 і число 1 є границею послідовності (a_n) і записують: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$ або $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1$ (тут $\lim$ — це початкові літери французького слова *limite* — границя). Інколи використовують і таке позначення: $\frac{n}{n+1} \rightarrow 1$ при $n \rightarrow \infty$.

Послідовність, яка має границю, називають збіжною. Послідовність з n -м членом $a_n = \frac{1}{2^n}$ є ще одним прикладом збіжної послідовності: зі збільшенням номера n члени цієї послідовності прямують до числа 0, тобто $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} = 0$.

Не будь-яка послідовність є збіжною. Наприклад, послідовність натуральних чисел не є збіжною. Також не є збіжною послідовність (a_n) , де $a_n = (-1)^n$. Для цих послідовностей неможливо вказати число, до якого прямують члени послідовності зі збільшенням номера члена.

Досі ми розглядали суми, які складаються зі скінченної кількості доданків. Проте при розв'язуванні деяких задач доводиться розглядати суми нескінченної кількості доданків.

Приклад 1. Розглянемо квадрат зі стороною 1 і поділимо його на 2 рівні частини (див. рисунок). Одну із частин зафарбуємо, а незафарбовану знову поділимо на дві рівні частини. Знову ж таки одну з частин зафарбуємо, а іншу поділимо на рівні частини і т. ін. Чи можна через певну кількість кроків таким алгоритмом зафарбувати весь квадрат?



Розв'язання. 1) Після першого кроку площа зафарбованої фігури дорівнюватиме $S_1 = \frac{1}{2}$.

2) Після другого кроку: $S_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$.

3) Після третього кроку: $S_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$.

4) Після n -го кроку: $S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n}$. Отримали послідовність $S_1, S_2, \dots, S_n, \dots$.

5) Використовуючи формулу суми n перших членів геометричної прогресії, установлюємо, що після n -го кроку площа зафарбованої фігури дорівнюватиме:

$$S_n = \frac{\frac{1}{2} \left(\left(\frac{1}{2} \right)^n - 1 \right)}{\frac{1}{2} - 1} = 1 - \left(\frac{1}{2} \right)^n = 1 - \frac{1}{2^n}.$$

6) Оскільки площа квадрата дорівнює 1, то із цієї формули випливає, що площа незафарбованої частини дорівнює $\frac{1}{2^n}$ та ніколи не перетвориться в 0.

Цей факт підтверджується тим, що для послідовності (S_n) , заданої формулою $S_n = 1 - \frac{1}{2^n}$, виконується рівність $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 1$. Справді, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} = 0$.

Відповідь. Ні.

Із розглянутого прикладу випливає, що $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{2^n} \right) = 1$, тобто $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n} \right) = 1$.

Це означає, що сума n перших членів геометричної прогресії $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots$ при необмеженому збільшенні n прямує до числа 1. Тому доцільно домовитися вважати число 1 сумою нескінченної геометричної прогресії $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots$.

Записують: $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots = 1$.

VI. Тренувальні вправи. Три рівні складності: А, В, С

Рівень А

1. Обчисліть суму нескінченної геометричної прогресії (b_n) зі знаменником q , якщо:
1) $b_1 = 24, q = \frac{3}{4}$; 3) $b_1 = 63, q = -\frac{1}{6}$; 2) $b_1 = -84, q = -\frac{1}{3}$;
4) $b_1 = -81, q = -\frac{2}{7}$; 5) $b_1 = 15, q = \frac{2}{3}$; 6) $b_1 = 18, q = -\frac{1}{4}$.
2. Знайдіть суму нескінченної геометричної прогресії:
1) 10; 1; 0,1; ...; 3) 6; -3; 1,5; ...; 2) 0,3; 0,03; 0,003; ...;
4) 64, 24, 9, ...; 5) -396, 330, -275,
3. Подайте нескінченний періодичний десятковий дріб у вигляді звичайного дробу:
1) 0,1111 ...; 3) 0,(24); 5) 0,2666 ...;
2) 0,(5); 4) 0,416416416 ...; 6) 0,6252525
4. Знайдіть суму нескінченної геометричної прогресії:
1) $\sqrt{2}, -1, \frac{1}{\sqrt{2}}, \dots$; 3) $\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}, 1, \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}, \dots$;
2) $3\sqrt{3}, 3, \sqrt{3}, \dots$; 4) $\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}, \frac{1}{2-\sqrt{2}}, \frac{1}{2}, \dots$.
5. Знайдіть перший член нескінченної геометричної прогресії, сума якої дорівнює 63, а знаменник дорівнює $\frac{4}{9}$.
6. Сума нескінченної геометричної прогресії дорівнює -60, а її перший член дорівнює -65. Знайдіть знаменник прогресії.

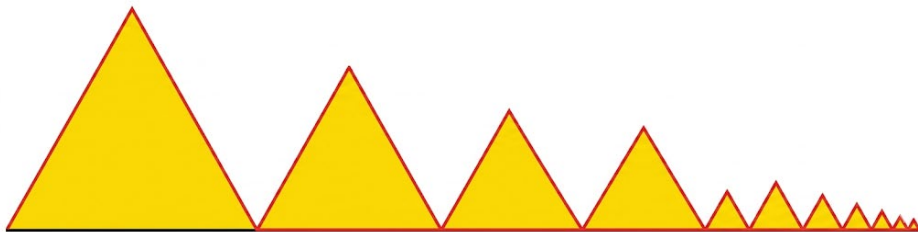
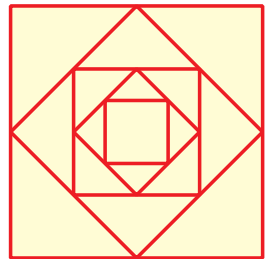
Рівень В

1. Знайдіть суму нескінченної геометричної прогресії (b_n) , якщо:
1) $b_3 = 4, b_5 = 2$; 2) $b_1 + b_3 = 20, b_2 + b_4 = \frac{20}{3}$;
3) $b_2 = 54, b_5 = 2$; 4) $b_2 - b_4 = 48, b_1 - b_3 = 240$.
2. Сума нескінченної геометричної прогресії дорівнює 2, а сума чотирьох її перших членів дорівнює $1\frac{7}{8}$. Знайдіть перший член і знаменник цієї прогресії.
3. Сума нескінченної геометричної прогресії дорівнює 256, а сума трьох її перших членів дорівнює 252. Знайдіть перший член і знаменник цієї прогресії.
4. Знайдіть суму нескінченної геометричної прогресії (b_n) , якщо $b_2 b_4 = 36$ і $b_3 + b_5 = 8$.
5. Знайдіть суму нескінченної геометричної прогресії (c_n) , якщо $c_3 c_5 = 20$ і $c_2 + c_4 = 12\sqrt{5}$.
6. Розв'яжіть рівняння:
1) $1 + x + x^2 + \dots = 4$, якщо $|x| < 1$; 2) $1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} - \dots = 1,5$, якщо $|x| > 1$.

7. Знайдіть знаменник нескінченної геометричної прогресії, перший член якої в 1,5 раза більший за суму решти її членів.
8. Знайдіть знаменник нескінченної геометричної прогресії, сума двох перших членів якої у 8 разів більша за суму решти її членів.

Рівень С

1. Сума чотирьох перших членів нескінченної геометричної прогресії зі знаменником q , $|q| < 1$, становить $\frac{9}{25}$ суми всіх її членів. Знайдіть перший член і знаменник цієї прогресії, якщо другий член прогресії дорівнює 8, а перший є додатним.
2. У нескінченній геометричній прогресії зі знаменником q , $|q| < 1$, сума членів з непарними номерами дорівнює 36, а сума членів з парними номерами дорівнює 12. Знайдіть перший член і знаменник прогресії.
3. У квадрат зі стороною a вписано квадрат, вершинами якого є середини сторін першого квадрата, у другий квадрат вписано третій, вершинами якого є середини сторін другого, і т. д. (див. рисунок). Знайдіть суму площ усіх квадратів.
4. Геометричну фігуру складено з нескінченної послідовності рівносторонніх трикутників, розміщених так, як показано на рисунку (див. рисунок). Площа кожного наступного трикутника вдвічі менша від площі попереднього. Сторона першого трикутника дорівнює 4 см. Чи поміститься така геометрична фігура на аркуші вашого зошиту?
5. У коло радіуса R вписано правильний трикутник, у трикутник вписано коло, у це коло вписано правильний трикутник і т. д. Знайдіть суму:
 - 1) периметрів усіх трикутників;
 - 2) площ трикутників;
 - 3) довжин кіл;
 - 4) площ кругів, обмежених даними колами.



6. У квадрат зі стороною a вписано коло, у коло вписано квадрат, у цей квадрат вписано коло, у яке знову вписано квадрат, і т. д. Знайдіть суму:
 - 1) периметрів усіх квадратів;
 - 2) площ квадратів;
 - 3) довжин кіл;
 - 4) площ кругів, обмежених даними колами.

7. Побудуйте графік функції $y = x^2 + \frac{x^2}{1+x^2} + \frac{x^2}{(1+x^2)^2} + \dots$, де $x \neq 0$. 8. Побудуйте графік функції $y = \sqrt{x} + \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}}{(1+\sqrt{x})^2} + \dots$, де $x > 0$.

Рефлексія

- 1) Сьогодні я дізнався/дізналась, що
- 2) Цей урок допоміг мені зрозуміти, що
- 3) Під час уроку я зрозумів/зрозуміла, що вже вмію
- 4) Найскладнішим для мене було
- 5) Тепер я впевнений/упевнена у своїй здатності
- 6) Найбільше мені сподобалося

Можливі теми проєктів

1. Дослідження різних типів геометричних прогресій.
2. Звук та його поширення. Явище відлуння та його зв'язок із прогресіями.
3. Фрактали: нескінченна краса математичних форм і їхній зв'язок з геометричною прогресією.







