

Тема 4.

Числові послідовності.

Границі числових послідовностей

Урок 3. Уявлення про границю числової послідовності. Сума нескінченної геометричної прогресії, модуль знаменника якої менший від 1

План уроку

1. Уявлення про границю послідовності.
2. Сума нескінченної геометричної прогресії, модуль знаменника якої менший від 1.

Очікувані результати навчальних досягнень

Учень/учениця:

досліджує специфічну проблемну ситуацію, використовуючи різноманітні інформаційні джерела [12 МАО 1.2.1–1 П];

визначає межі даних, формулює припущення щодо даних у специфічних проблемних ситуаціях [12 МАО 1.2.3–1 П];

обирає серед кількох різних стратегій розв'язання специфічних проблемних ситуацій таку, що задовольняє певні умови [12 МАО 2.2.2–1 П];

здійснює перехід від абстрактного до конкретного та від конкретного до абстрактного [12 МАО 2.3.1–2 П];

визначає, яких даних недостатньо чи є надлишкові дані, під час розв'язання специфічної проблемної ситуації [12 МАО 3.1.2–1 П];

добирає доцільні математичні поняття, факти і послідовність дій для розв'язання проблемних ситуацій [12 МАО 4.2.1–1 П].

Дружні поради вчителю/вчительці до уроку

- 1) Сформулюйте учням/ученицям мотиваційні запитання щодо матеріалу уроку.
- 2) Запропонуйте учням/ученицям, на ваш вибір, завдання на повторення вивченого.

- 3) Сформулюйте практичну задачу (без розв'язання). Розв'язання пропонуємо у вигляді групової роботи наприкінці уроку.
- 4) Теорію подавайте стисло, акцентуйте увагу (коли можливо) на її практичному застосуванні.
- 5) До теоретичних тверджень наведено ілюстративні задачі. Обирайте ілюстративні задачі на власний розсуд.
- 6) Увесь запропонований матеріал неможливо подати в часових вимірах одного уроку, тому обирайте кількість матеріалу на власний розсуд.
- 7) Заплануйте розв'язання практичної задачі. Об'єднайте учнів/учениць у кілька груп. Під час розв'язання задачі групами важливо формувати комунікаційні навички, інтегрувати здобуті знання у розв'язання практичних задач.
- 8) Обов'язково пропонуйте учням/ученицям самотужки або в групах розв'язувати тренувальні завдання за трьома рівнями складності, на вибір учня/учениці. Формуйте навички розв'язання прикладів та задач і навчайте учнів/учениць самостійної роботи над завданнями.
- 9) Мотивуйте учнів/учениць до проєктної діяльності. Запропонуйте учням/ученицям обрати теми для індивідуальних (групових) проєктів. Робота над обраним проєктом може тривати впродовж вивчення всієї змістової теми. Створення проєктів та їхній захист можуть бути альтернативою контрольної роботи з теми.
- 10) Можливі теми для створення проєктів запропоновані. Також темами проєктів можуть бути практичні завдання за рівнями складності В або С.

I. Організаційна частина (2 хв)

Мотиваційні запитання

- 1) Чи помічали ви в реальному житті деякі процеси, які можуть тривати нескінченно, але мають певну межу?
- 2) Чи може сума нескінченної кількості членів геометричної прогресії мати певну суму?
- 3) Чи зустрічаються у природі або техніці процеси, які щоразу зменшуються в геометричній прогресії?
- 4) Чи можливо виписати усі члени нескінченної геометричної прогресії?
- 4) Чи можемо ми застосовувати суми нескінченних прогресій у фінансах, комп'ютерній графіці або фізиці?

II. Повторення (3–4 хв)

1. Виконайте піднесення до степеня: $\left(-\frac{m^5}{2}\right)^2$.

А	Б	В	Г	Д
$-2,5m^{10}$	$-0,25m^7$	$0,25m^{10}$	$2,5m^7$	$-0,25m^{10}$

Відповідь. В.

2. Обчисліть: $\left(\frac{1}{2}\right)^4 + \left(\frac{1}{2}\right)^5$.

А	Б	В	Г	Д
$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{3}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{1}{4}$

Відповідь. В.

3. Яке з наведених чисел є членом геометричної прогресії 1, 8, 64, ...? (Пробне ЗНО, 2012 р.).

А	Б	В	Г	Д
2^8	2^{11}	2^{14}	2^{18}	2^{23}

Відповідь. Г.

4. Знайдіть знаменник геометричної прогресії (c_n), якщо $c_1 = 100$ і $c_6 = 24300$.

А	Б	В	Г	Д
0,00243	24,3	0,3	3	243

Відповідь. Г.

5. Відомо, що $y + \frac{1}{y} = 6$. Знайдіть $y^2 + \frac{1}{y^2}$.

Відповідь. 34.

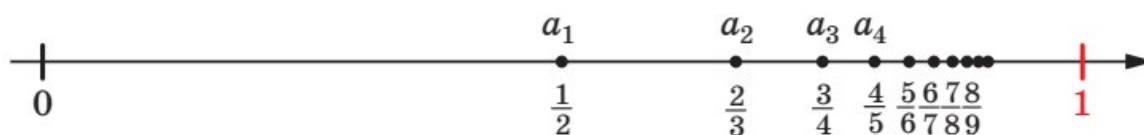
Як я вирішую певну проблему?

Задача. У мобільному застосунку супермаркету передбачено кешбек: за першу покупку на чек від 1000 грн користувач отримує 99 грн кешбеку, а за кожну наступну таку покупку — на 16 % менше, ніж за попередню. Яка максимальна сума кешбеку, яку може отримати користувач? Відповідь запишіть у гривнях.

III. Уявлення про границю послідовності

Розглянемо послідовність (a_n) , задану формулою n -го члена $a_n = \frac{n}{n+1}$. Випишемо

кілька перших членів цієї послідовності: $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{6}{7}, \frac{7}{8}, \frac{8}{9}, \dots$. Якщо члени цієї послідовності зображати точками на координатній прямій, то ці точки будуть розміщатися все ближче й ближче до точки з координатою 1 (див. рисунок).



Говорять, що зі збільшенням номера n члени послідовності (a_n) прямують до числа 1 і число 1 є границею послідовності (a_n) і записують: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$ або $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1$ (тут

$\lim$ — це початкові літери французького слова *limite* – границя). Інколи використовують і таке позначення: $\frac{n}{n+1} \rightarrow 1$ при $n \rightarrow \infty$.

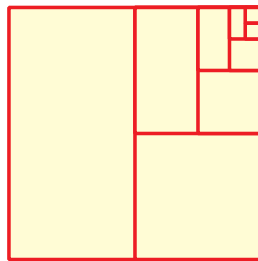
Послідовність, яка має границю, називають збіжною. Послідовність з n -м членом $a_n = \frac{1}{2^n}$ є ще одним прикладом збіжної послідовності: зі збільшенням номера n члени цієї послідовності прямують до числа 0, тобто $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} = 0$.

Не будь-яка послідовність є збіжною. Наприклад, послідовність натуральних чисел не є збіжною. Також не є збіжною послідовність (a_n) , де $a_n = (-1)^n$. Для цих послідовностей неможливо вказати число, до якого прямують члени послідовності зі збільшенням номера члена.

Досі ми розглядали суми, які складаються зі скінченної кількості доданків. Проте при розв'язуванні деяких задач доводиться розглядати суми нескінченної кількості доданків.

Ілюстративний приклад

6. Розглянемо квадрат зі стороною 1 і поділимо його на 2 рівні частини (див. рисунок). Одну із частин зафарбуємо, а незафарбовану знову поділимо на дві рівні частини. Знову ж таки одну з частин зафарбуємо, а іншу поділимо на рівні частини і т. ін. Чи можна через певну кількість кроків таким алгоритмом зафарбувати весь квадрат?



Розв'язання. 1) Після першого кроку площа зафарбованої фігури дорівнюватиме $S_1 = \frac{1}{2}$.

2) Після другого кроку: $S_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$.

3) Після третього кроку: $S_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$.

4) Після n -го кроку: $S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n}$. Отримали послідовність $S_1, S_2, \dots, S_n, \dots$.

5) Використовуючи формулу суми n перших членів геометричної прогресії, установлюємо, що після n -го кроку площа зафарбованої фігури дорівнюватиме:

$$S_n = \frac{\frac{1}{2} \left(\left(\frac{1}{2} \right)^n - 1 \right)}{\frac{1}{2} - 1} = 1 - \left(\frac{1}{2} \right)^n = 1 - \frac{1}{2^n}.$$

6) Оскільки площа квадрата дорівнює 1, то із цієї формули випливає, що площа незафарбованої частини дорівнює $\frac{1}{2^n}$ та ніколи не перетвориться в 0.

Цей факт підтверджується тим, що для послідовності (S_n) , заданої формулою $S_n = 1 - \frac{1}{2^n}$, виконується рівність $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 1$. Справді, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} = 0$.

Відповідь. Ні.

Із розглянутого прикладу випливає, що $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) = 1$, тобто $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n}\right) = 1$.

Це означає, що сума n перших членів геометричної прогресії $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots$ при необмеженому збільшенні n прямує до числа 1. Тому доцільно домовитися вважати число 1 сумою нескінченної геометричної прогресії $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots$.

Записують: $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots = 1$.

IV. Сума нескінченної геометричної прогресії, модуль знаменника якої менший від 1

Розглянемо нескінченну геометричну прогресію $b_1, b_2, b_3, \dots, b_n, \dots$, у якій $|q| < 1$.

Сума n перших її членів обчислюється за формулою $S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1}$.

Перетворимо отриманий вираз: $S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1} = \frac{b_1 - b_1 q^n}{1 - q} = \frac{b_1}{1 - q} - \frac{b_1}{1 - q} \cdot q^n$.

Так як при $|q| < 1$ виконується рівність $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$, то і $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_1}{1 - q} \cdot q^n = 0$. Таким чином:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{b_1}{1 - q} - \frac{b_1}{1 - q} q^n \right) = \frac{b_1}{1 - q}.$$

Означення. Число $\frac{b_1}{1 - q}$ називають **сумою нескінченної геометричної про-**

гресії (b_n), у якій $|q| < 1$, і записують: $b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_n + \dots = \frac{b_1}{1 - q}$ або $S = \frac{b_1}{1 - q}$.

Розглянемо геометричну прогресію $1, 2, 2^2, 2^3, \dots, 2^n, \dots$, у якій $q = 2$, тобто $|q| > 1$.

Сума наприклад її перших 100 членів – величезне число. Зрозуміло, що при необмеженому збільшенні n сума n перших членів цієї прогресії не прямує до жодного числа. У такому разі говорять, що розглядувана нескінченна прогресія суми не має. Узагалі, про суму нескінченної геометричної прогресії можна говорити лише тоді, коли $|q| < 1$.

Ілюстративні приклади

- 7.** Подайте нескінченний періодичний десятковий дріб $0,2(54)$ у вигляді звичайного дробу.

Розв'язання. 1) $0,2(54) = 0,2545454\dots = 0,2 + 0,0545454\dots = 0,2 + 0,054 + 0,00054 + 0,000054 + \dots$.

2) Нескінченний періодичний десятковий дріб $0,0545454\dots$ можна розглядати як суму нескінченної геометричної прогресії, перший член якої дорівнює $b_1 = 0,054$,

а знаменник $q = 0,01$. Тоді: $0,0545454\dots = \frac{0,054}{1 - 0,01} = \frac{0,054}{0,99} = \frac{54}{990} = \frac{3}{55}$.

$$3) \text{ Звідси } 0,2(54) = 0,2 + 0,0(54) = 0,2 + \frac{3}{55} = \frac{1}{5} + \frac{3}{55} = \frac{14}{55}.$$

Відповідь. $\frac{14}{55}$.

- 8.** Дано правильний трикутник зі стороною a . Із висот цього трикутника побудовано другий правильний трикутник, із висот другого побудовано третій трикутник і т. д. Знайдіть суму периметрів і суму площ усіх трикутників.

Розв'язання. 1) Висота правильного трикутника зі стороною a дорівнює $\frac{a\sqrt{3}}{2}$, висота правильного трикутника зі стороною $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ дорівнює $\frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3a}{4}$ і т. д.

2) Тоді периметри даних трикутників утворюють послідовність: $3a, \frac{3a\sqrt{3}}{2}, \frac{9a}{4}, \dots$, що є геометричною прогресією зі знаменником $\frac{\sqrt{3}}{2} < 1$.

3) Отже, суму периметрів S_a можна обчислити за формулою: $S_a = \frac{3a}{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}$.

$$\text{Таким чином: } S_a = \frac{6a}{2 - \sqrt{3}} = \frac{6a(2 + \sqrt{3})}{(2 - \sqrt{3})(2 + \sqrt{3})} = 6a(2 + \sqrt{3}).$$

4) Площа правильного трикутника зі стороною a дорівнює $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$. Площа правильного трикутника зі стороною $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ дорівнює $\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{3}{4}$. Площа правильного трикутника зі стороною $\frac{3a}{4}$ дорівнює $\left(\frac{3a}{4}\right)^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2$ і т. д.

5) Площі трикутників утворюють послідовність, яка є геометричною прогресією з першим членом $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ і знаменником $\frac{3}{4}$.

6) Отже, суму площ S_b можна обчислити за формулою $S_b = \frac{\frac{a^2\sqrt{3}}{4}}{1 - \frac{3}{4}}$. Звідси $S_b = a^2\sqrt{3}$.

Відповідь. $6a(2 + \sqrt{3}), a^2\sqrt{3}$.

- 9.** Знайдіть знаменник q нескінченної геометричної прогресії ($|q| < 1$), у якій кожний член у 4 рази більший за суму всіх її наступних членів.

Розв'язання. 1) Нехай a_n — довільний член прогресії, a_{n+1} наступний за ним член. Розглянемо нескінченну геометричну прогресію з першим членом a_{n+1} і знаменником q ($|q| < 1$).

2) Тоді її сума дорівнюватиме $\frac{a_{n+1}}{1 - q}$.

3) За умовою $a_n = \frac{4a_{n+1}}{1 - q}$, тобто $a_n = \frac{4a_n q}{1 - q}$.

4) Оскільки жодний член геометричної прогресії не дорівнює нулю, то отримуємо:

$$1 = \frac{4q}{1-q}.$$

5) Звідси $q = 0,2$.

Відповідь. 0,2.

V. Розв'язування практичної задачі. Групова активність

Як я вирішую певну проблему?

Задача. У мобільному застосунку супермаркету передбачено кешбек: за першу покупку на чек від 1000 грн користувач отримує 99 грн кешбеку, а за кожну наступну таку покупку – на 16% менше, ніж за попередню. Яка максимальна сума кешбеку, яку може отримати користувач? Відповідь запишіть у гривнях.

Розв'язання. 1) Розглянемо геометричну прогресію (a_n) із першим членом a_1 та знаменником q , де $a_1 = 100$ грн — перший кешбек, а оскільки кожен наступний на 16% менший, то $q = 1 - 0,16 = 0,84$.

2) Обчислимо суму всіх кешбеків:

$$S = \frac{99}{1-0,84} = \frac{99}{0,16} = 618,75 \text{ (грн)}.$$

Відповідь. 618,75 грн.

VI. Тренувальні вправи. Три рівні складності: А, В, С (8–10 хв)

Рівень А

1. Обчисліть суму нескінченної геометричної прогресії (b_n) зі знаменником q , якщо:

- | | | |
|------------------------------------|-----------------------------------|------------------------------------|
| 1) $b_1 = 24, q = \frac{3}{4}$; | 3) $b_1 = 63, q = -\frac{1}{6}$; | 2) $b_1 = -84, q = -\frac{1}{3}$; |
| 4) $b_1 = -81, q = -\frac{2}{7}$; | 5) $b_1 = 15, q = \frac{2}{3}$; | 6) $b_1 = 18, q = -\frac{1}{4}$. |

2. Знайдіть суму нескінченної геометричної прогресії:

- | | | |
|----------------------|---------------------------|----------------------------|
| 1) 10; 1; 0,1; ... ; | 3) 6; -3; 1,5; ... ; | 2) 0,3; 0,03; 0,003; ... ; |
| 4) 64, 24, 9, ... ; | 5) -396, 330, -275, | |

3. Подайте нескінченний періодичний десятковий дріб у вигляді звичайного дробу:

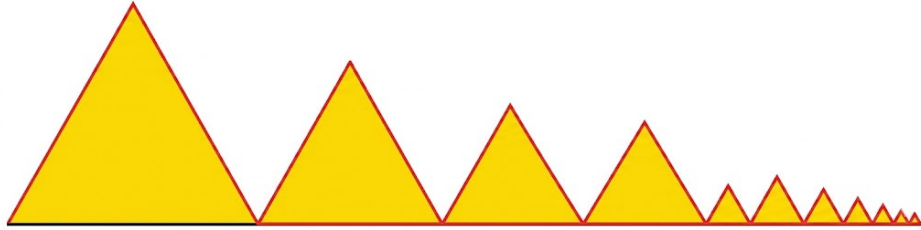
- | | | |
|----------------|---------------------|--------------------|
| 1) 0,1111 ...; | 3) 0,(24); | 5) 0,2666 ...; |
| 2) 0,(5); | 4) 0,416416416 ...; | 6) 0,6252525 |

4. Знайдіть суму нескінченної геометричної прогресії:

- | | |
|--|--|
| 1) $\sqrt{2}, -1, \frac{1}{\sqrt{2}}, \dots$; | 3) $\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}, 1, \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}, \dots$; |
| 2) $3\sqrt{3}, 3, \sqrt{3}, \dots$; | 4) $\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}, \frac{1}{2-\sqrt{2}}, \frac{1}{2}, \dots$. |

5. Знайдіть перший член нескінченної геометричної прогресії, сума якої дорівнює 63, а знаменник дорівнює $\frac{4}{9}$.

5. У коло радіуса R вписано правильний трикутник, у трикутник вписано коло, у це коло вписано правильний трикутник і т. д. Знайдіть суму:
- 1) периметрів усіх трикутників;
 - 2) площ трикутників;
 - 3) довжин кіл;
 - 4) площ кругів, обмежених даними колами.



6. У квадрат зі стороною a вписано коло, у коло вписано квадрат, у цей квадрат вписано коло, у яке знову вписано квадрат, і т. д. Знайдіть суму:
- 1) периметрів усіх квадратів;
 - 2) площ квадратів;
 - 3) довжин кіл;
 - 4) площ кругів, обмежених даними колами.

7. Побудуйте графік функції $y = x^2 + \frac{x^2}{1+x^2} + \frac{x^2}{(1+x^2)^2} + \dots$, де $x \neq 0$. 8. Побудуйте гра-

фік функції $y = \sqrt{x} + \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}}{(1+\sqrt{x})^2} + \dots$, де $x > 0$.

VII. Рефлексія (2 хв)

- 1) Сьогодні я дізнався/дізналась, що
- 2) Цей урок допоміг мені зрозуміти, що
- 3) Під час уроку я зрозумів/зрозуміла, що вже вмію
- 4) Найскладнішим для мене було
- 5) Тепер я впевнений/впевнена у своїй здатності

6) Найбільше мені сподобалося

.....

.....

Можливі теми проєктів

1. Дослідження різних типів геометричних прогресій.
2. Звук та його поширення. Явище відлуння та його зв'язок із прогресіями.
3. Фрактали: нескінченна краса математичних форм і їхній зв'язок з геометричною прогресією.

Список використаної літератури

- 1) Ключко І. Я. Математика: Тестові завдання. Ч. І. Алгебра (зовнішнє незалежне оцінювання) / І. Я. Ключко. – Тернопіль: Навчальна книга – Богдан, 2021.
- 2) Ключко І. Я. Математика: тестові завдання. Ч. II. Алгебра і початки аналізу (зовнішнє незалежне оцінювання) / І. Я. Ключко. – Тернопіль: Навчальна книга – Богдан, 2021.
- 3) Мерзляк А. Г. Алгебра для загальноосвітніх навчальних закладів з поглибленим вивченням математики : підручн. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закладів / А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонський, М. С. Якір. – Х. : Гімназія, 2017.