

Тема 4.

Числові послідовності.

Границі числових послідовностей

Урок 4. Обчислення сум

РОБОЧИЙ АРКУШ

(моє ім'я)

I. Очікувані результати навчальних досягнень

На уроці ви навчитеся:

- 1) застосовувати формули сум для швидкого обчислення безпосередньо всіх членів даної послідовності;
- 2) застосовувати різні методи спрощення сум;
- 3) моделювати практичні ситуації за допомогою послідовностей та обчислювати їхні суми;
- 4) застосовувати знання про обчислення сум для розв'язування практичних та наукових задач.

II. Повторення

1. Сума n перших членів арифметичної прогресії обчислюється за формулою $S_n = 6n - n^2$. Знайдіть a_6 .

А	Б	В	Г	Д
-3	-4	-5	-6	-8

2. Обчисліть суму натуральних чисел, які не перевищують 150 і при діленні на 7 дають ненульову частку і остачу 3.

А	Б	В	Г	Д
1680	1710	1631	1560	1600

3. Знайдіть суму чотирьох перших членів геометричної прогресії (b_n), якщо її перший член $b_1 = 2$, а знаменник $q = 3$.

А	Б	В	Г	Д
26	242	80	160	320

4. Спростіть вираз: $\frac{\frac{a-b}{a+b} + \frac{b}{a}}{\frac{a}{a+b} - \frac{a-b}{a}}$.

А	Б	В	Г	Д
$\frac{a+b}{b}$	$\frac{a}{b}$	$\frac{a-b}{b}$	$\frac{a^2-b^2}{b^2}$	$\frac{a^2+b^2}{b^2}$

5. Установіть відповідність між виразом (1–4) та виразом, який йому тотожно рівний (А–Д).

Вираз

1 $(-a-b)^2$

2 $-(a-b)^3$

3 $-(a+b)^3$

Тотожно рівний вираз

А $b^3 - a^3 + 3a^2b - 3ab^2$

Б $-b^3 - a^3 - 3a^2b - 3ab^2$

В $2ab - a^2 - b^2$

Г $a^2 + 2ab + b^2$

Д $-2ab + a^2 + b^2$

	А	Б	В	Г	Д
1	☐	☐	☐	☐	☐
2	☐	☐	☐	☐	☐
3	☐	☐	☐	☐	☐

III. Обчислення сум

Разом з послідовністю $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ можна розглядати послідовність (S_n):

$$S_1 = a_1, S_2 = a_1 + a_2, S_3 = a_1 + a_2 + a_3, \dots, S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n, \dots$$

Знаходження формули n -го члена послідовності (S_n) називають *сумуванням перших n членів послідовності* (a_n).

За допомогою грецької літери Σ (сигма) суму $a_1 + a_2 + \dots + a_n$ записують так: $\sum_{k=1}^n a_k$.

Наприклад, $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \sum_{k=1}^n k^2$; $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \sum_{k=1}^n k^3$.

Приклад 1. Обчисліть $\sum_{k=1}^n k^2$.

Розв'язання. 1) Дана сума є сумою квадратів n перших натуральних чисел.

2) За формулою «куб двочлена», $(a+1)^3 = a^3 + 3a^2 + 3a + 1$, звідси

$$3a^2 = (a+1)^3 - a^3 - 3a - 1.$$

Надаючи змінній a послідовно значення $1, 2, 3, \dots, n$, одержимо n правильних числових рівностей:

$$3 \cdot 1^2 = 2^3 - 1^3 - 3 \cdot 1 - 1,$$

$$3 \cdot 2^2 = 3^3 - 2^3 - 3 \cdot 2 - 1,$$

$$3 \cdot 3^2 = 4^3 - 3^3 - 3 \cdot 3 - 1,$$

$$3 \cdot 4^2 = 5^3 - 4^3 - 3 \cdot 4 - 1,$$

...

$$3 \cdot n^2 = (n+1)^3 - n^3 - 3 \cdot n - 1.$$

3) Додавши почленно всі ці рівності (числа $2^3, 3^3, 4^3, \dots, n^3$ взаємно знищуються), одержимо тотожність: $3 \cdot (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2) = (n+1)^3 - 3(1+2+3+\dots+n) - n - 1$, звідси:

$$3 \cdot (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2) = (n+1)^3 - \frac{3}{2}n \cdot (n+1) - (n+1);$$

$$3 \cdot (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{2}.$$

$$4) \text{ Отже, } 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

$$\text{Відповідь. } \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Приклад 2. Обчисліть $\sum_{k=1}^n k^3$.

Розв'язання. 1) Дана сума є сумою кубів n перших натуральних чисел.

2) $(a+1)^4 = a^4 + 4a^3 + 6a^2 + 4a + 1$, звідси $4a^3 = (a+1)^4 - a^4 - 6a^2 - 4a - 1$. Надаючи змінній a послідовно значення $1, 2, 3, \dots, n$, одержимо n правильних числових рівностей:

$$4 \cdot 1^3 = 2^4 - 1^4 - 6 \cdot 1^2 - 4 \cdot 1 - 1,$$

$$4 \cdot 2^3 = 3^4 - 2^4 - 6 \cdot 2^2 - 4 \cdot 2 - 1,$$

$$4 \cdot 3^3 = 4^4 - 3^4 - 6 \cdot 3^2 - 4 \cdot 3 - 1,$$

$$4 \cdot 4^3 = 5^4 - 4^4 - 6 \cdot 4^2 - 4 \cdot 4 - 1,$$

...

$$4 \cdot n^3 = (n+1)^4 - n^4 - 6n^2 - 4n - 1.$$

3) Додавши почленно всі ці рівності (числа $2^4, 3^4, 4^4, \dots, n^4$ взаємно знищуються), одержимо тотожність:

$$4 \cdot (1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3) = (n+1)^4 - 6(1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2) - 4(1+2+3+\dots+n) - n - 1,$$

звідси:

$$4 \cdot (1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3) = (n+1)^4 - n(n+1)(2n+1) - 2n(n+1) - (n+1);$$

$$4 \cdot (1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3) = (n+1)((n+1)^3 - n(2n+1) - 2n - 1);$$

$$4 \cdot (1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3) = (n+1)(n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - 2n^2 - n - 2n - 1);$$

$$4 \cdot (1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3) = (n+1)(n^3 + n^2);$$

$$4 \cdot (1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3) = n^2(n+1)^2.$$

$$4) \text{ Отже, } 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}, \text{ тобто: } 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2.$$

$$\text{Відповідь. } \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2.$$

$$\text{Отже, ми довели, що } \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}; \quad \sum_{k=1}^n k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2.$$

Це означає, що ми вміємо обчислювати суми перших n членів, відповідно послідовності квадратів і послідовності кубів натуральних чисел. Також формули для обчислення суми n перших членів арифметичної і геометричної прогресій нам вже відомі.

Приклад 3. Знайдіть суму S перших ста членів послідовності $\frac{1}{1 \cdot 2}, \frac{1}{2 \cdot 3}, \frac{1}{3 \cdot 4}, \dots, \frac{1}{n(n+1)}, \dots$

Приклад 3. Знайдіть суму $7 + 77 + 777 + \underbrace{77\dots7}_n$.

IV. Розв'язування практичної задачі

Як я вирішую певну проблему?

Задача. Щоб заощадити певну суму коштів, семеро друзів у скарбничку кладуть по 10 грн, а кожного k -го місяця кладуть у цю ж скарбничку по $10k^2$ грн. Скільки коштів буде в скарбничці через рік заощаджень?

V. Тренувальні вправи. Три рівні складності: А, В, С

Рівень А

1. Знайдіть суму $2 + 10 + 30 + \dots + n(n^2 + 1)$.
2. Знайдіть суму:
1) $1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + \dots + n(n+1)(n+2)$; 2) $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + n(n+1)$.
3. Знайдіть суму $\frac{4}{3} + \frac{19}{9} + \frac{82}{27} + \dots + \frac{3^n \cdot n + 1}{3^n}$.
4. Знайдіть суму $\sum_{k=1}^n \frac{5^k \cdot k - 1}{5^k}$.
5. Знайдіть суму $\sum_{k=1}^n \frac{3^{k+1} \cdot k^2 + 3^k \cdot k + 1}{3^k}$.
6. Знайдіть суму перших ста доданків:
1) $1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \dots + n(-1)^{n+1} + \dots$; 2) $1 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \dots + n^2(-1)^{n+1} + \dots$.

Рівень В

1. Знайдіть суму перших сорока членів послідовності:
1) $\frac{41}{1 \cdot 2}, \frac{41}{2 \cdot 3}, \frac{41}{3 \cdot 4}, \frac{41}{4 \cdot 5}, \dots, \frac{41}{n(n+1)}, \dots$;
2) $\frac{3}{1 \cdot 4}, \frac{3}{4 \cdot 7}, \frac{3}{7 \cdot 10}, \frac{3}{10 \cdot 13}, \dots, \frac{3}{(3n-2)(3n+1)}, \dots$.
2. Знайдіть суму:
1) $9 + 99 + 999 + \dots + \underbrace{99 \dots 9}_n$; 2) $5 + 55 + 555 + \dots + \underbrace{55 \dots 5}_n$.
3. Доведіть, що коли послідовність (a_n) — арифметична прогресія з додатними членами, то: $\frac{1}{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2}} + \frac{1}{\sqrt{a_2} + \sqrt{a_3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{a_n} + \sqrt{a_{n+1}}} = \frac{n}{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_{n+1}}}$.
4. Знайдіть суму:
1) $\frac{1}{1 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 9} + \frac{1}{9 \cdot 13} + \dots + \frac{1}{(4n-7)(4n-3)}$;
2) $\frac{1}{2 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 12} + \frac{1}{12 \cdot 17} + \dots + \frac{1}{(5n-3)(5n+2)}$.
5. Знайдіть суму $\sum_{k=1}^n \frac{1}{(6k-1)(6k+5)}$.
6. Знайдіть суму:
1) $\frac{3}{1 \cdot 2} + \frac{7}{2 \cdot 3} + \frac{13}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{n^2 + n + 1}{n(n+1)}$; 2) $\frac{3}{1 \cdot 2} + \frac{13}{2 \cdot 3} + \frac{37}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{n^3 + n^2 + 1}{n(n+1)}$.

Рівень С

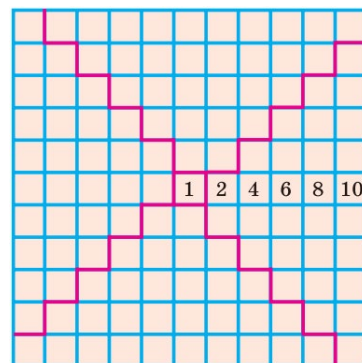
1. Знайдіть суму $\left(5 + \frac{1}{5}\right)^2 + \left(5^2 + \frac{1}{5^2}\right)^2 + \left(5^3 + \frac{1}{5^3}\right)^2 + \dots + \left(5^n + \frac{1}{5^n}\right)^2$.

2. Знайдіть суму:

1) $\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \dots + \frac{n}{(n+1)!}$;

2) $\frac{3}{4} + \frac{5}{36} + \frac{7}{144} + \dots + \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$.

3. Доведіть тотожність: $8 \cdot (1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n) + 1 = (2n + 1)^2$.
З'ясуйте її геометричний зміст за рисунком (див. рисунок).



4*. Знайдіть суму $\sum_{k=1}^n \frac{1}{(k+1)^2 - 1}$.

5*. Знайдіть суму $\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$.

6*. Знайдіть суму $S_n = 1 + 2a + 3a^2 + 4a^3 + \dots + n \cdot a^{n-1}$, де $a \neq 1$.

Рефлексія

- 1) Сьогодні я дізнався/дізналась, що
- 2) Цей урок допоміг мені зрозуміти, що
- 3) Під час уроку я зрозумів/зрозуміла, що вже вмію
- 4) Найскладнішим для мене було
- 5) Тепер я впевнений/упевнена у своїй здатності
- 6) Найбільше мені сподобалося

Можливі теми проєктів

- 1.** «Магія формул Гауса»: як працюють методи швидкого сумування.
- 2.** «Суми нескінченних послідовностей»: дослідження, коли вони існують.







