

Тема 4.

Числові послідовності.

Границі числових послідовностей

Урок 5. Послідовність Фібоначчі. Послідовність Люка

РОБОЧИЙ АРКУШ

(моє ім'я)

I. Очікувані результати навчальних досягнень

На уроці ви навчитеся:

- 1) визначати числа Фібоначчі та Люка;
- 2) застосовувати рекурентні формули для знаходження членів послідовностей;
- 3) пояснювати зв'язок між послідовностями Фібоначчі та Люка;
- 4) використовувати формулу Біне для обчислення будь-якого члена послідовності;
- 5) перевіряти правильність обчислень чисел Фібоначчі та Люка;
- 6) пояснювати та застосовувати співвідношення між числами Фібоначчі та числами Люка;
- 7) розпізнавати прояви чисел Фібоначчі та Люка у природі, в мистецтві та в науці;
- 8) використовувати графічні і візуальні моделі для подання чисел Фібоначчі та Люка;
- 9) формулювати висновки про закономірності й властивості чисел Фібоначчі та Люка.

II. Повторення

1. Скільки коренів має дане квадратне рівняння $x^2 - x - 1 = 0$?

А	Б	В	Г	Д
жодного	один	два різні	два однакові	більше, ніж два

2. Дано: $a_1 = 7$, $a_n = a_{n-1} - 4$. Знайдіть a_4 .

А	Б	В	Г	Д
-1	-3	-5	-7	-9

3. Обчисліть $\left(\left(\sqrt[3]{3}\right)^3\right)^3$.

А	Б	В	Г	Д
$\sqrt[3]{3}$	3	9	27	інша відповідь

4. Чи є число 164 членом арифметичної прогресії 3; 10; 17; ...? У разі позитивної відповіді вкажіть його номер.

А	Б	В	Г	Д
ні	22	24	26	28

5. Установіть відповідність між періодичним дробом (1–3) та звичайним дробом (А–Д), який йому дорівнює.

Періодичний дріб

1 0,1(2)

2 0,2(5)

3 0,2(1)

Звичайний дріб

А $\frac{11}{90}$

Б $\frac{23}{90}$

В $\frac{17}{90}$

Г $\frac{34}{45}$

Д $\frac{19}{90}$

	А	Б	В	Г	Д
1	☐	☐	☐	☐	☐
2	☐	☐	☐	☐	☐
3	☐	☐	☐	☐	☐

III. Послідовність чисел Фібоначчі. Формула Біне

Розглянемо знамениту задачу, з якої розпочалася теорія чисел Фібоначчі.

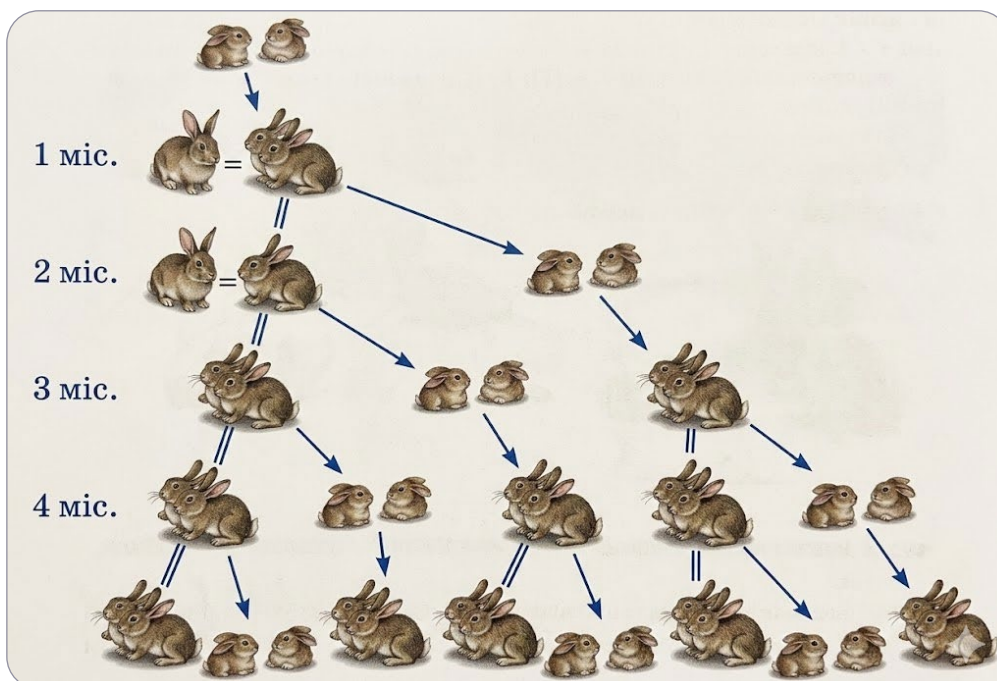
Приклад 1. Один чоловік помістив в огорожену ділянку пару новонароджених кроликів, які через місяць стають дорослими. Природа кроликів така, що пара дорослих кроликів народжує щомісячно пару молодих кроленят, а пара новонароджених кроленят через 1 місяць стає дорослою та починає приносити своє потомство. Скільки пар кроликів буде в цій ділянці через рік? (Мається на увазі, що жоден кролик за цей рік не помре.)

Розв'язання. 1) Через 1 місяць пара новонароджених кроленят стане дорослою. Тобто кількість кроликів ще не зміниться. Загальна кількість кроликів: 1 пара.

2) Через 2 місяці ця пара кроликів народить пару молодих кроленят. Загальна кількість кроликів: 2 пари.

3) Через 3 місяці пара новонароджених кроленят стане дорослою, а їхні батьки народять ще одну пару молодих кроленят. Загальна кількість кроликів: 3 пари.

4) Через 4 місяці дві пари дорослих кроленят народять по парі молодих і одна пара молодих стане дорослою (див. рисунок). Загальна кількість кроликів: 5 пар.



5) Отже, бачимо чітку закономірність, відповідно до якої якщо позначити кількість пар кроликів через n місяців за F_n , то: $F_0 = 1, F_1 = 1, F_2 = 2, F_3 = 3, F_4 = 5, \dots$

6) Зрозуміло, що $F_n = p + q$, де p — кількість пар дорослих кроликів, а q — кількість пар молодих.

7) Через місяць p пар дорослих кроликів дають потомство p пар новонароджених кроликів, а q пар новонароджених кроликів перетворюються на q пар дорослих. Отже, $F_{n+1} = 2p + q$.

8) Аналогічно через ще один місяць p пар та q пар дорослих кроликів приведуть у потомстві відповідно p та q пар новонароджених, а p пар народжених попереднього місяця стануть дорослими. Отже, $F_{n+2} = 3p + 2q$.

9) Помічаємо, що $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$.

10) Враховуючи, що $F_0 = 1, F_1 = 1, F_2 = 2, F_3 = 3, F_4 = 5$, складемо таблицю:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
F_n	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233

Відповідь. 233 пари.

Розв'язуючи дану вправу ми отримали цікаву числову послідовність. Часто її, розглядають, починаючи з числа 0.

Означення. Послідовність F_n , яка задається рекурентною формулою: $F_0 = 0, F_1 = 1, F_{n+2} = F_{n+1} + F_n, n \geq 0$ називають **послідовністю Фібоначчі**.

У таблиці вказано деякі члени послідовності Фібоначчі: $F_0, F_1, \dots, F_{12}$.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
F_n	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144

У цій послідовності кожен член, починаючи з третього, дорівнює сумі двох попередніх. Рівність $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ називається **рекурентним рівнянням** послідовності. Елементи цієї послідовності називають **числами Фібоначчі**.

Якщо в послідовності Фібоначчі для кожного $n \in \mathbb{N}$, обчислити $\frac{F_{n+1}}{F_n}$, то отримаємо числову послідовність: 1; 2; 1,5; 1,(6); 1,6; 1,625; 1,(615384); 1,61(904761); ...

Цій послідовності притаманна властивість: зі зростанням номерів її члени все ближче наближаються до відношення $\frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,618$, яке називають *золотим перерізом*.

Історична довідка

Послідовності Фібоначчі та Люка — це дві споріднені числові послідовності, що мають глибоке історичне й математичне значення. Їхні ідеї формувалися протягом багатьох століть — від давньоіндійських математиків до європейських учених епохи Відродження та Нового часу.

Витоки

Ще задовго до появи Фібоначчі подібні закономірності були відомі в стародавній Індії. Математики Пінгала (III–II ст. до н.е.) та Вірачар'я (VII ст. н.е.) вивчали комбінації коротких і довгих складів у поезії, які підкорялися тій самій залежності: кожен наступний елемент дорівнює сумі двох попередніх. Це можна вважати найдавнішою формою послідовності Фібоначчі.

Леонардо Фібоначчі (1170–1250)

Італійський математик — Леонардо з Пізи, більш відомий як Фібоначчі, увійшов в історію як один із перших європейських математиків, хто використав індійсько-арабську систему числення. У 1202 році він опублікував книгу «Liber Abaci», де навів задачу про розмноження кроликів, яка призвела до формування відомої послідовності чисел Фібоначчі.

Едуар Люка (1842–1891)

Французький математик Едуар Люка через багато століть після Фібоначчі продовжив вивчення цих чисел. Він запропонував нову послідовність, побудовану за тим самим принципом, але з іншими початковими умовами. Ці числа мають ті самі властивості, що й числа Фібоначчі.



Золотий переріз

Послідовності Фібоначчі та Люка мають спільну рекурсивну формулу: кожен наступний член дорівнює сумі двох попередніх. Вони тісно пов'язані між собою математичною формулою $L_n = F_{n-1} + F_{n+1}$. Обидві послідовності мають відношення сусідніх членів, яке наближається до числа $\varphi \approx 1,618$, яке називають золотим перерізом. Це відношення зустрічається часто в природі — у спіральних лініях мушель, у спіральному розташуванні насіння соняшника, ялинкових шишках, а також в пропорціях людського тіла та навіть в орбітах планет.

Отже, історія послідовностей Фібоначчі та Люка демонструє, як просте правило додавання може стати основою для глибоких математичних і природних закономірностей. Від стародавньої Індії до сучасної науки — ці послідовності залишаються символом гармонії чисел і природи.

Формула загального члена послідовності Фібоначчі

Теорема. Якщо (F_n) , $n \geq 0$ — послідовність Фібоначчі, то формула загального члена послідовності має вигляд: $F_n = \frac{\alpha_1^n - \alpha_2^n}{\sqrt{5}}$, $n \geq 0$, де α_1, α_2 — корені квадратного рівняння $z^2 - z - 1 = 0$ і $\alpha_1 > \alpha_2$, тобто $\alpha_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$, $\alpha_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$.

Формулу загального члена послідовності Фібоначчі, вказану у даній теоремі, називають **формулою Біне**.

Історична довідка

Жан-Батист Біне (1786–1856)

Французький математик, що зробив значний внесок у теорію чисел, досліджуючи послідовності Фібоначчі та їхні властивості. Він уперше вивів явну формулу для чисел Фібоначчі, яка дозволяє обчислювати будь-який n -й член послідовності без рекурсії. Тому цю формулу і називають формулою Біне. Завдяки цьому відкриттю стало можливим більш ефективно досліджувати властивості чисел Фібоначчі та їхні зв'язки із золотим перерізом.



IV. Послідовність чисел Люка. Формула загального члена послідовності Люка

Означення. Послідовність L_n , яка задається рекурентною формулою: $L_0 = 2$, $L_1 = 1$, $L_{n+2} = L_{n+1} + L_n$, $n \geq 0$ називають **послідовністю Люка**.

У таблиці вказано деякі члени послідовності Люка: $L_0, L_1, \dots, L_{12}$.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
L_n	2	1	3	4	7	11	18	29	47	76	123	199	322

У цій послідовності, як і в послідовності Фібоначчі, кожен член, починаючи з третього, дорівнює сумі двох попередніх. Рівність $L_{n+2} = L_{n+1} + L_n$ називається **рекурентним рівнянням** послідовності. Елементи цієї послідовності називають **числами Люка**.

Отже, у чисел Фібоначчі і Люка однакові рекурентні рівняння, і тому є багато спільного. Проте, у низці властивостей ці послідовності істотно відрізняються.

Взаємозв'язок між числами Фібоначчі та Люка

Теорема. Якщо (F_n) , $n \geq 0$ — послідовність Фібоначчі, а (L_n) , $n \geq 0$ — послідовність Люка, то: $L_n = F_{n-1} + F_{n+1}$, або $L_n = F_n + 2F_{n-1}$.

Теорема. Якщо (F_n) , $n \geq 0$ — послідовність Фібоначчі, а (L_n) , $n \geq 0$ — послідовність Люка, то: $F_n = \frac{1}{5}(L_{n-1} + L_{n+1})$.

За формулою Біне, можна довести і такі рівності: $F_{2n} = F_n L_n$ та $2L_{2n} = L_n^2 + 5F_n^2$.

Формула загального члена послідовності Люка

Теорема. Якщо (L_n) , $n \geq 0$ — послідовність Люка, то формула загального члена послідовності має вигляд: $L_n = \alpha_1^n + \alpha_2^n$, $n \geq 0$, де α_1, α_2 — корені квадратного рівняння $z^2 - z - 1 = 0$ і $\alpha_1 > \alpha_2$, тобто $\alpha_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\alpha_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

Приклад 2. Якщо (F_n) , $n \geq 0$ — послідовність чисел Фібоначчі ($F_1 = 0, F_2 = 1, \dots$), то обчисліть значення виразу: $\frac{F_8}{F_{10}} + \frac{F_6}{F_7}$.

Розв'язання. 1) У послідовності (F_n) , $n \geq 0$ Фібоначчі: $F_6 = 8, F_7 = 13, F_8 = 21, F_{10} = 55$.

2) Таким чином, $\frac{F_8}{F_{10}} + \frac{F_6}{F_7} = \frac{21}{55} + \frac{8}{13} = \frac{713}{715}$.

Відповідь. $\frac{713}{715}$.

Приклад 3. Доведіть, що $L_{n+2}^3 = L_{n+1}^3 + L_n^3 + 3L_n L_{n+1} L_{n+2}$, де (L_n) — послідовність Люка.

Розв'язання. 1) Відомо, що $L_n + L_{n+1} = L_{n+2}$.

2) Використовуючи формулу суми кубів $(a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b)$, маємо:

$L_{n+2}^3 = L_{n+1}^3 + L_n^3 + 3L_n L_{n+1} (L_n + L_{n+1})$, тобто $L_{n+2}^3 = L_{n+1}^3 + L_n^3 + 3L_n L_{n+1} L_{n+2}$,
що і треба було довести.

V. Тотожності Фібоначчі та Люка

Теорема. Для будь-яких натуральних $n > 1$ і $k > 1$ справедливі тотожності:

$\alpha_1 = \sqrt[n]{\frac{1}{2}(L_n + \sqrt{5}F_n)}$ і $\alpha_2 = (-1)^{k+1} \sqrt[k]{\frac{1}{2}(L_k - \sqrt{5}F_k)}$, де (F_n) , $n \geq 0$ — послідовність Фібоначчі, (L_n) , $n \geq 0$ — послідовність Люка, α_1 , α_2 — корені квадратного рівняння $z^2 - z - 1 = 0$ і $\alpha_1 > \alpha_2$, тобто $\alpha_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\alpha_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

Наслідок 1. Оскільки $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$, то $\sqrt[n]{\frac{1}{2}(L_n + \sqrt{5}F_n)} + (-1)^{k+1} \sqrt[k]{\frac{1}{2}(L_k - \sqrt{5}F_k)} = 1$.

Наслідок 2. Оскільки $\alpha_1 - \alpha_2 = \sqrt{5}$, то $\sqrt[n]{\frac{1}{2}(L_n + \sqrt{5}F_n)} - (-1)^{k+1} \sqrt[k]{\frac{1}{2}(L_k - \sqrt{5}F_k)} = \sqrt{5}$.

Наслідок 3. Оскільки $\alpha_1 \cdot \alpha_2 = -1$ і $|\alpha_1 \cdot \alpha_2| = 1$, то $\left| \sqrt[n]{\frac{1}{2}(L_n + \sqrt{5}F_n)} \cdot \sqrt[k]{\frac{1}{2}(L_k - \sqrt{5}F_k)} \right| = 1$.

Підставляючи в цю тотожність різні натуральні $n > 1$ і $k > 1$, дістанемо різні тотожності:

$$1) n = k = 2. \sqrt{\frac{1}{2}(L_2 + \sqrt{5}F_2)} - \sqrt{\frac{1}{2}(L_2 - \sqrt{5}F_2)} = 1; \sqrt{\frac{1}{2}(L_2 + \sqrt{5}F_2)} + \sqrt{\frac{1}{2}(L_2 - \sqrt{5}F_2)} = \sqrt{5}.$$

$$\text{Оскільки } L_2 = 3, F_2 = 1, \text{ то: } \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}} - \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}} = 1; \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}} + \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}} = \sqrt{5}.$$

$$2) n = k = 3. \sqrt[3]{2+\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{5}} = 1; \sqrt[3]{2+\sqrt{5}} - \sqrt[3]{2-\sqrt{5}} = \sqrt{5}.$$

$$3) n = 2, k = 3. \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{5}} = 1; \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}} - \sqrt[3]{2-\sqrt{5}} = \sqrt{5}.$$

Приклад 4. Доведіть тотожність: $\sqrt[9]{38+17\sqrt{5}} - \sqrt[9]{38-17\sqrt{5}} = \sqrt{5}$.

Розв'язання. 1) Якщо (F_n) , $n \geq 0$ — послідовність Фібоначчі, (L_n) , $n \geq 0$ — послідовність Люка, α_1 , α_2 — корені квадратного рівняння $z^2 - z - 1 = 0$ і $\alpha_1 > \alpha_2$, то:

$$\alpha_1 - \alpha_2 = \sqrt{5}, \text{ де } \alpha_1 = \sqrt[n]{\frac{1}{2}(L_n + \sqrt{5}F_n)}, \alpha_2 = (-1)^{k+1} \sqrt[k]{\frac{1}{2}(L_k - \sqrt{5}F_k)}.$$

2) Підставляючи в цю тотожність $n = k = 9$, отримуємо:

$$\sqrt[9]{\frac{1}{2}(L_9 + \sqrt{5}F_9)} - \sqrt[9]{\frac{1}{2}(L_9 - \sqrt{5}F_9)} = \sqrt{5},$$

$$\sqrt[9]{\frac{76+34\sqrt{5}}{2}} - \sqrt[9]{\frac{76-34\sqrt{5}}{2}} = \sqrt{5},$$

$$\sqrt[9]{38+17\sqrt{5}} - \sqrt[9]{38-17\sqrt{5}} = \sqrt{5}, \text{ що і треба було довести.}$$

V. Розв'язування практичної задачі

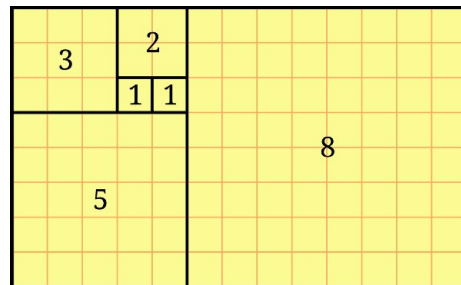
Як я вирішую певну проблему?

Задача. Дизайнер створює велику композицію із сімейних світлин для однієї зі стін кімнати. Фото мають бути у вигляді квадратів, сторони яких — числа Фібоначчі: 1 см, 1 см, 2 см, 3 см, 5 см, 8 см, ... (див. рисунок).

I. Скільки квадратів можна розмістити на прямокутній стіні, шириною 4 м і висотою 2,5 м?

II. Яка площа створеної композиції?

III. Яке співвідношення сторін композиції?



Історична довідка

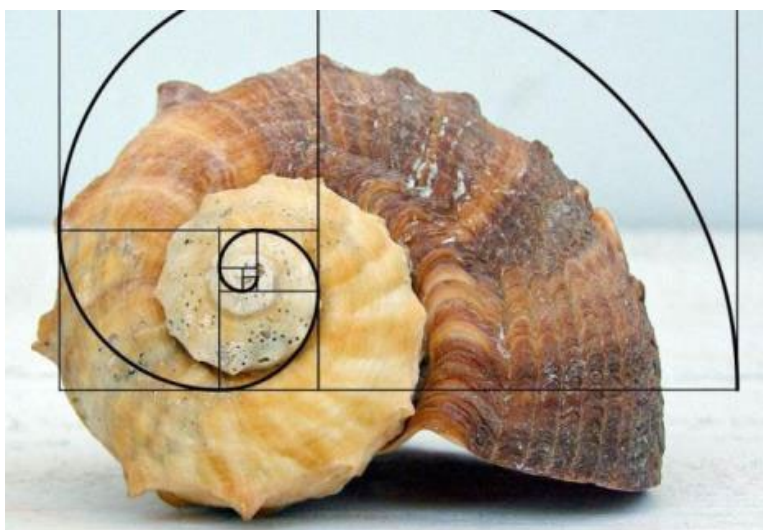
Число $\frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,618$ грає важливу роль в мистецтві, де з античних часів його розглядали як естетично найсприятливіше відношення.

У давні часи, математик і філософ на ім'я Евклід, який дуже любив знаходити красу в числах і формах, помітив щось неймовірне: якщо відрізок AB розділити точкою C так, щоб відношення всієї довжини до більшої частини $\frac{AB}{AC}$ було таке ж, як відношення

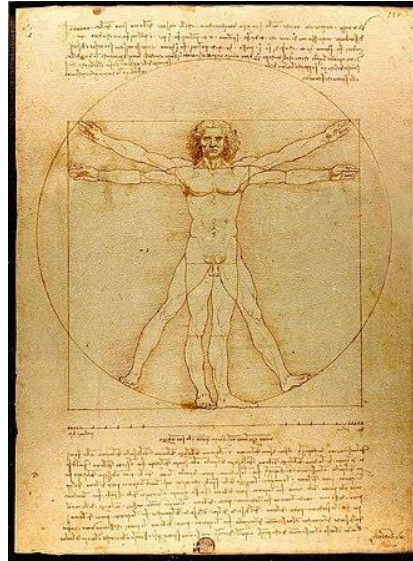
більшої частини до меншої $\frac{AC}{BC}$ (див. рисунок), то $A \quad C \quad B$ виходило особливе число.

$\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{BC} = \alpha$. Число α і є *золотим перерізом* і його значення дорівнює відношенню $\frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,618$. Але найбільш цікаво, що це число зустрічається всюди і його навіть називають *числом Бога*.

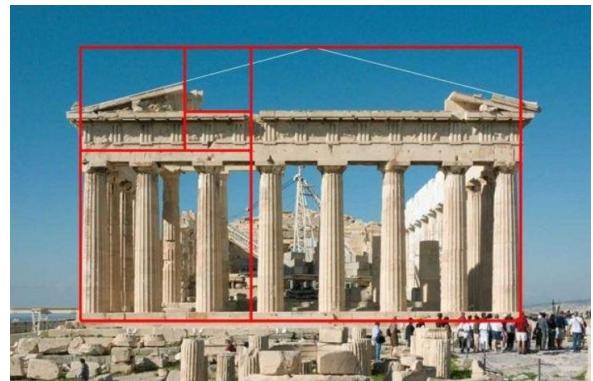
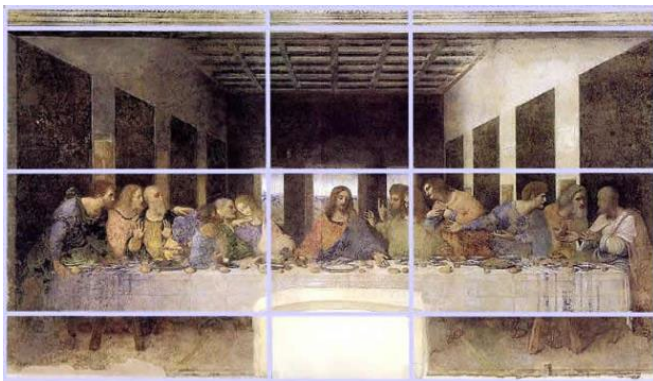
1) Природа будує спіралі у візерунках молюсків за методами золотого перерізу.



2) Пропорції тіла людини також тісно пов'язані із даним числом. «Вітрувіанська людина» (див. рисунок), намальована Леонардо да Вінчі (приблизно 1490 р.) за пропорціями золотого перерізу, що демонструє пропорції між частинами тіла людини у даному відношенні.



3) У мистецтві художники та архітектори використовують це число щоб картини або будівлі мали правильні пропорції та виглядали гармонійно.



VI. Тренувальні вправи. Три рівні складності: А, В, С

Рівень А

1. Запишіть перші 10 членів послідовності Фібоначчі.
2. Запишіть перші 10 членів послідовності Люка.
3. $A = F_6^2 + F_7^2$, $B = F_{13}$, де (F_k) — послідовність Фібоначчі. Порівняйте числа A та B .
4. $A = L_5^2 + L_6^2$, $B = L_{12}$, де (L_k) — послідовність Люка. Порівняйте числа A та B .
5. Якщо α_1, α_2 — корені квадратного рівняння $z^2 - z - 1 = 0$ і $\alpha_1 > \alpha_2$, то доведіть, що:
 - 1) $\alpha_1^2 = \frac{1}{2}(3 + \sqrt{5})$; 2) $\alpha_2^2 = \frac{1}{2}(3 - \sqrt{5})$; 3) $\alpha_1^3 = 2 + \sqrt{5}$; 4) $\alpha_2^3 = 2 - \sqrt{5}$.

6. Доведіть тотожності:

$$1) \sqrt[4]{\frac{7+3\sqrt{5}}{2}} - \sqrt[4]{\frac{7-3\sqrt{5}}{2}} = 1;$$

$$2) \sqrt[5]{\frac{11+5\sqrt{5}}{2}} + \sqrt[5]{\frac{11-5\sqrt{5}}{2}} = 1;$$

$$3) \sqrt[6]{9+4\sqrt{5}} - \sqrt[6]{9-4\sqrt{5}} = 1;$$

$$4) \sqrt[7]{\frac{29+13\sqrt{5}}{2}} + \sqrt[7]{\frac{29-13\sqrt{5}}{2}} = 1.$$

7. Доведіть тотожності:

$$1) \sqrt[3]{2+\sqrt{5}} - \sqrt[3]{2-\sqrt{5}} = \sqrt{5};$$

$$3) \sqrt[5]{\frac{11+5\sqrt{5}}{2}} - \sqrt[5]{\frac{11-5\sqrt{5}}{2}} = \sqrt{5};$$

$$2) \sqrt[4]{\frac{7+3\sqrt{5}}{2}} + \sqrt[4]{\frac{7-3\sqrt{5}}{2}} = \sqrt{5};$$

$$4) \sqrt[6]{9+4\sqrt{5}} + \sqrt[6]{9-4\sqrt{5}} = \sqrt{5}.$$

Рівень В

1. Обчисліть вираз: $\frac{F_5^2 + F_6^2}{3F_3 + F_4}$, де (F_k) — послідовність Фібоначчі.

2. Обчисліть $\sum_{k=1}^{10} L_k$, де (L_k) — послідовність Люка.

3. Обчисліть $\sum_{k=1}^{10} F_k^2$, де (F_k) — послідовність Фібоначчі.

4. Обчисліть $\sum_{k=1}^6 F_{2k}$, де (F_k) — послідовність Фібоначчі.

5. Якщо α_1, α_2 — корені квадратного рівняння $z^2 - z - 1 = 0$ і $\alpha_1 > \alpha_2$, то доведіть, що:

$$1) \frac{1}{\alpha_1^2} + \frac{1}{\alpha_2^2} = 3;$$

$$2) \frac{1}{\alpha_1^3} + \frac{1}{\alpha_2^3} = -4;$$

$$3) \frac{1}{\alpha_1^4} + \frac{1}{\alpha_2^4} = 7.$$

6. Доведіть тотожність:

$$1) \sqrt[3]{2+\sqrt{5}} - \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}} = 1;$$

$$2) \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}} - \sqrt[4]{\frac{7-3\sqrt{5}}{2}} = 1;$$

$$3) \sqrt[3]{2+\sqrt{5}} + \sqrt[5]{\frac{11-5\sqrt{5}}{2}} = 1;$$

$$4) \sqrt[5]{\frac{11+5\sqrt{5}}{2}} + \sqrt[9]{38-17\sqrt{5}} = 1.$$

7. Доведіть тотожність:

$$1) \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}} - \sqrt[3]{2-\sqrt{5}} = \sqrt{5};$$

$$2) \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}} + \sqrt[4]{\frac{7-3\sqrt{5}}{2}} = \sqrt{5};$$

$$3) \sqrt[4]{\frac{7+3\sqrt{5}}{2}} - \sqrt[7]{\frac{29-13\sqrt{5}}{2}} = \sqrt{5};$$

$$4) \sqrt[8]{\frac{47+21\sqrt{5}}{2}} - \sqrt[5]{\frac{11-5\sqrt{5}}{2}} = \sqrt{5}.$$

Рівень С

1. Доведіть тотожність $L_n^2 - 5F_n^2 = 4 \cdot (-1)^n$.

2. Доведіть тотожність $F_n^2 + L_n^2 + 2F_{2n} = 4F_{n+1}^2$.

3. Якщо α_1, α_2 — корені квадратного рівняння $z^2 - z - 1 = 0$ і $\alpha_1 > \alpha_2$, то доведіть, що:

$$1) \alpha_1^n + \alpha_1^{n+1} = \alpha_1^{n+2};$$

$$2) \alpha_2^n + \alpha_2^{n+1} = \alpha_2^{n+2}.$$

4. Якщо α_1, α_2 — корені квадратного рівняння $z^2 - z - 1 = 0$ і $\alpha_1 > \alpha_2$, то доведіть, що:

1) $\alpha_1 + \alpha_1^2 + \alpha_1^3 + \alpha_1^4 + \alpha_1^5 = 13 + 6\sqrt{5}$; 2) $\alpha_2 - \alpha_2^2 + \alpha_2^3 - \alpha_2^4 + \alpha_2^5 = 3 - 2\sqrt{5}$.

5. Доведіть тотожність:

1) $\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}} = \sqrt[3]{2+\sqrt{5}} + \sqrt[4]{\frac{7-3\sqrt{5}}{2}} + \sqrt[5]{\frac{11-5\sqrt{5}}{2}}$;

2) $\sqrt[3]{2+\sqrt{5}} = \sqrt[10]{\frac{123-55\sqrt{5}}{2}} + \sqrt[9]{38-17\sqrt{5}} + \sqrt[5]{\frac{11+5\sqrt{5}}{2}}$;

3) $\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{5}} + \sqrt[4]{\frac{7-3\sqrt{5}}{2}} = \sqrt[3]{2+\sqrt{5}}$;

4) $\sqrt[4]{\frac{7+3\sqrt{5}}{2}} + \sqrt[5]{\frac{11-5\sqrt{5}}{2}} = \sqrt[8]{\frac{47+21\sqrt{5}}{2}} + \sqrt[7]{\frac{29-13\sqrt{5}}{2}}$.

6. Доведіть тотожність:

1) $\sqrt[3]{2+\sqrt{5}} \cdot \sqrt[4]{\frac{7-3\sqrt{5}}{2}} = 1$;

2) $\sqrt[5]{\frac{11+5\sqrt{5}}{2}} \cdot \sqrt[3]{2-\sqrt{5}} = -1$.

3) $\left| \sqrt[4]{\frac{1}{2}(7+3\sqrt{5})} \cdot \sqrt[7]{\frac{1}{2}(29-13\sqrt{5})} \right| = 1$;

4) $\left| \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}} \cdot \sqrt[3]{2-\sqrt{5}} \cdot \sqrt[4]{\frac{7+3\sqrt{5}}{2}} \cdot \sqrt[5]{\frac{11-5\sqrt{5}}{2}} \right| = 1$.

Рефлексія. «Плюс-Мінус-Цікавинка»

(+) що було зрозумілим:

.....

(-) що залишилося незрозумілим:

.....

(?) що здивувало або зацікавило:

.....

Можливі теми проєктів

1. Золотий переріз у мистецтві та архітектурі.
2. Рекурентні формули на практиці: обчислення великих членів послідовності.
3. Цікаві рекурентні послідовності другого та третього порядків. Числа Пелля, числа Якобсталя, числа Трібоначчі тощо.

