

Тема 4.

Числові послідовності.

Границі числових послідовностей

Урок 6. Метод математичної індукції та його застосування до числових послідовностей

РОБОЧИЙ АРКУШ

(моє ім'я)

I. Очікувані результати навчальних досягнень

На уроці ви навчитеся:

- 1) пояснювати, що таке метод математичної індукції;
- 2) визначати базу індукції та формулювати припущення та описувати крок індукції;
- 3) застосовувати метод індукції для доведення формул сум числових послідовностей;
- 4) застосовувати індукцію до рекурентних послідовностей;
- 5) спрощувати та перетворювати вирази у доведеннях;
- 6) будувати логічний ланцюжок доведення: база – крок індукції;
- 7) використовувати індукцію для доведення тотожностей та нерівностей;
- 8) критично оцінювати власні доведення та доведення інших.

II. Повторення

1. Обчисліть суму $1 + 2 + \dots + 20$.

А	Б	В	Г	Д
200	210	220	230	240

2. Спростіть вираз $n^2 - (n - 1)^2$.

А	Б	В	Г	Д
$2n - 1$	$n - 1$	$n + 1$	$2n + 1$	$n^2 - 1$

3. При яких значеннях n нерівність $2n > n + 1$ є правильною?

А	Б	В	Г	Д
$n < 1$	$n > 0$	$n > 1$	$n < 0$	n — будь-яке

4. Серед наведених рівностей оберіть тотожність:

А $n^2 + n = n(n - 1)$

Б $(n + 1)^3 - n^3 = 3n^2 + 3n + 1$

В $(n + 1)! = n! + 1$

Г $2^n + 2^{n+1} = 2^{2n}$

Д $n^3 - n = (n - 1)(n + 1)$

5. Спростити вираз $\frac{(n+1)!}{n!}$.

А	Б	В	Г	Д
n	$n!$	$\frac{1}{n+1}$	$n + 1$	$(n + 1)^2$

III. Застосування методу математичної індукції до числових послідовностей

Метод математичної індукції полягає в тому, що твердження, яке залежить від натурального числа n , справедливе для будь-якого $n \in \mathbb{N}$, якщо виконуються дві умови:

- а) твердження справедливе при $n = k_0$ — база індукції;
- б) при будь-якому натуральному $k > k_0$ зі справедливості твердження для $n = k$ випливає його справедливості і для $n = k + 1$ — крок індукції.

Метод математичної індукції часто використовують для:

- знаходження формули загального члена деякої послідовності;
- доведення різних властивостей, що залежать від номера n ;
- доведення різних нерівностей із числовими послідовностями.

Приклад 1. Доведіть, що при будь-якому $n \in \mathbb{N}$ виконується рівність:

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1).$$

Розв'язання. 1) Доведемо дану рівність за методом математичної індукції.

2) База індукції. При $n = 1$ маємо $1^2 = \frac{1}{6} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3$, що справедливо.

3) Крок індукції. Нехай при $n = k$: $1^2 + 2^2 + \dots + k^2 = \frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)$.

Доведемо, що при $n = k + 1$: $1^2 + 2^2 + \dots + k^2 + (k+1)^2 = \frac{1}{6}(k+1)(k+2)(2k+3)$.

4) Доведення. $(1^2 + 2^2 + \dots + k^2) + (k+1)^2 = \frac{1}{6}k(k+1)(2k+1) + (k+1)^2 =$

$$= \frac{1}{6}(k+1)(k(2k+1)+6(k+1)) = \frac{1}{6}(k+1)(2k^2+7k+6) = \frac{1}{6}(k+1)(k+2)(2k+3).$$

5) Отже, при $n \in \mathbb{N}$ виконується рівність: $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$, що і треба було довести.

Приклад 2. Знайдіть формулу для знаходження суми $S_n = 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \dots + n \cdot n!$.

Розв'язання. 1) Обчислимо декілька сум і спробуємо знайти закономірність.

$$S_1 = 1 \cdot 1! = 1$$

$$S_1 = 2! - 1$$

$$S_2 = 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! = 5$$

$$S_2 = 3! - 1$$

$$S_3 = 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! = 23$$

$$S_3 = 4! - 1$$

...

...

2) Можемо висловити гіпотезу, що $S_n = (n+1)! - 1$. Переконаємося у цьому за методом математичної індукції.

3) *База індукції.* При $n = 1$: отримуємо правильну рівність $1 \cdot 1! = (1+1)! - 1$.

4) *Крок індукції.* Припустимо, що для $n = k$:

$$S_k = (k+1)! - 1, \text{ тобто } 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \dots + k \cdot k! = (k+1)! - 1.$$

Доведемо, що для $n = k+1$:

$$S_{k+1} = (k+2)! - 1, \text{ тобто } 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \dots + k \cdot k! + (k+1) \cdot (k+1)! = (k+2)! - 1.$$

$$5) \text{ Доведення. } 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \dots + k \cdot k! + (k+1) \cdot (k+1)! = (k+1)! - 1 + (k+1) \cdot (k+1)! = (k+1)!(k+2) - 1 = (k+2)! - 1.$$

6) Отже, за методом математичної індукції $S_n = (n+1)! - 1$ при $n \in \mathbb{N}$, що і треба було довести.

IV. Розв'язування практичної задачі

Як я вирішую певну проблему?

Задача. У шаховому турнірі взяли участь n шахістів. Кожний зустрівся з кожним іншим один раз, причому жодна партія не закінчилася внічию. Доведіть, що за результатами турніру всіх шахістів можна пронумерувати в такому порядку, щоб кожний попередній був переможцем наступного.

V. Тренувальні вправи. Три рівні складності: А, В, С

Рівень А

1. Послідовність задано формулою n -го члена: $a_n = n^2 + n + 17$. Обчисліть перший, другий, третій та четвертий члени цієї послідовності. Зробіть припущення. Установіть, чи є висловлена гіпотеза правильною.
2. Доведіть, що при будь-якому $n \in \mathbb{N}$ виконується рівність: $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
3. Доведіть, що при будь-якому $n \in \mathbb{N}$ виконується рівність: $\sum_{k=1}^n (2k-1)^2 = \frac{n(4n^2-1)}{3}$.
4. Доведіть, що при будь-якому $n \in \mathbb{N}$ виконується рівність: $\sum_{k=1}^n k(2k+1) = \frac{n(n+1)(4n+5)}{6}$.

5. Доведіть, що при будь-якому $n \in \mathbb{N}$ виконується рівність: $\sum_{k=1}^n \frac{k(k+3)}{(k+1)(k+2)} = \frac{n(n+1)}{n+2}$.
6. Доведіть, що при будь-якому натуральному n виконується рівність:

$$\left(1 - \frac{4}{1}\right) \left(1 - \frac{4}{9}\right) \left(1 - \frac{4}{25}\right) \cdots \left(1 - \frac{4}{(2n-1)^2}\right) = \frac{1+2n}{1-2n}.$$
7. Доведіть, що при будь-якому натуральному $n \geq 2$ виконується рівність

$$\left(1 - \frac{1}{4}\right) \left(1 - \frac{1}{9}\right) \left(1 - \frac{1}{16}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{n+1}{2n}.$$
8. Доведіть, що при будь-якому $n \in \mathbb{N}$ виконується рівність:

$$\frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \frac{5}{8} + \dots + \frac{2n-3}{2^{n-1}} + \frac{2n-1}{2^n} = 3 - \frac{2n+3}{2^n}.$$

Рівень В

1. Знайдіть формулу для обчислення значення суми $\sum_{k=1}^n \frac{1}{(2k-1)(2k+1)}$, де $n \in \mathbb{N}$.
2. Знайдіть формулу для обчислення значення суми $-1 + 3 - 5 + 7 - 9 + \dots + (-1)^n \cdot (2n-1)$, де $n \in \mathbb{N}$.
3. Знайдіть формулу для обчислення значення суми $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)}$, де $n \in \mathbb{N}$.
4. Доведіть нерівність: $\frac{x_1^2}{y_1} + \frac{x_2^2}{y_2} + \dots + \frac{x_n^2}{y_n} \geq \frac{(x_1 + x_2 + \dots + x_n)^2}{y_1 + y_2 + \dots + y_n}$, де $y_1, y_2, \dots, y_n$ — додатні числа.
5. Доведіть нерівність: $|a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n| \leq |a_1| + |a_2| + |a_3| + \dots + |a_n|$, де $n \in \mathbb{N}$.
6. Доведіть нерівність: $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+n} > \frac{13}{24}$, де $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$.
7. Послідовність (a_n) задано рекурентно: $a_1 = -13, a_{n+1} = a_n + 3n$.
 Доведіть, що $a_n = \frac{(3n-29)n}{2}$ — формула n -го члена для даної послідовності.
8. Послідовність (a_n) задано рекурентно: $a_1 = 0, a_{n+1} = a_n + n^2$.
 Доведіть, що $a_n = \frac{(n-1)n(2n-1)}{6}$ — формула n -го члена для даної послідовності.

Рівень С

1. Доведіть нерівність:
 1) $\sqrt[n]{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots + \sqrt{2}}}} < 2$; 2) $\sqrt[n]{6 + \sqrt{6 + \sqrt{6 + \dots + \sqrt{6}}}} < 3$.
2. Доведіть нерівність $\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} > 2\sqrt{n+1} - 2$, де $n \in \mathbb{N}$.
3. Доведіть нерівність $\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} < 2\sqrt{n}$, де $n \in \mathbb{N}$.

4. Доведіть нерівність $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} > \frac{13}{24}$, де $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$.
5. Доведіть нерівність $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \dots \cdot \frac{2n-1}{2n} \leq \frac{1}{\sqrt{3n+1}}$, де $n \in \mathbb{N}$.
6. Доведіть подвійну нерівність $\frac{n(1+\sqrt{n})}{2} \leq \sum_{k=1}^n \sqrt{k} \leq n \cdot \sqrt{\frac{n+1}{2}}$, де $n \in \mathbb{N}$.
7. Послідовність (a_n) задано рекурентно: $a_1 = 0$, $a_{n+1} = a_n + n$. Знайдіть формулу n -го члена для даної послідовності.
8. Послідовність (a_n) задано рекурентно: $a_1 = 0$, $a_{n+1} = a_n + n^3$. Знайдіть формулу n -го члена для даної послідовності.

VI. Рефлексія (2 хв)

1. Я можу пояснити, що таке метод математичної індукції.

Так	Ще треба потренуватися	Ні
-----	------------------------	----
2. Я розумію, чому перевірка першого кроку (бази індукції) важлива.

Так	Ще треба потренуватися	Ні
-----	------------------------	----
3. Я можу сформулювати припущення індукції для доведення твердження.

Так	Ще треба потренуватися	Ні
-----	------------------------	----
4. Я можу показати, як перейти від k -го члена послідовності до $(k+1)$ -го у доведенні.

Так	Ще треба потренуватися	Ні
-----	------------------------	----
5. Я розумію, як застосовувати метод індукції до формул для сум послідовностей.

Так	Ще треба потренуватися	Ні
-----	------------------------	----
6. Я можу застосувати метод індукції до рекурентних послідовностей.

Так	Ще треба потренуватися	Ні
-----	------------------------	----
7. Я відчуваю, що можу самостійно перевірити просту тотожність для всіх n .

Так	Ще треба потренуватися	Ні
-----	------------------------	----
8. Я можу пояснити, чому індукція дозволяє довести твердження для всіх натуральних чисел, а не тільки для кількох прикладів.

Так	Ще треба потренуватися	Ні
-----	------------------------	----
9. Я розумію, чим метод індукції відрізняється від простого підрахунку або перевірки конкретних випадків.

Так	Ще треба потренуватися	Ні
-----	------------------------	----
10. Я готовий/готова спробувати довести власну формулу для послідовності методом індукції.

Так	Ще треба потренуватися	Ні
-----	------------------------	----

Можливі теми проєктів

1. Історія виникнення методу математичної індукції та цікаві факти.
2. Розробка ігор та головоломок за допомогою послідовностей.
3. Метод математичної індукції для послідовностей, заданих рекурентно.







