11

Тема 4. Числові послідовності. Границі числових послідовностей

Урок 6. Метод математичної індукції та його застосування до числових послідовностей

План уроку

1. Метод математичної індукції.
2. Застосування методу математичної індукції до числових послідовностей.

Очікувані результати навчальних досягнень

Учень/учениця:

досліджує специфічну проблемну ситуацію, використовуючи різноманітні інформаційні джерела [12 МАО 1.2.1–1 П];

визначає межі даних, формулює припущення щодо даних у специфічних проблемних ситуаціях [12 МАО 1.2.3–1 П];

обирає серед кількох різних стратегій розв'язання специфічних проблемних ситуацій таку, що задовольняє певні умови [12 МАО 2.2.2–1 П];

здійснює перехід від абстрактного до конкретного та від конкретного до абстрактного [12 МАО 2.3.1–2 П].

Дружні поради вчителю/вчительці до уроку

1) Сформулюйте учням/ученицям мотиваційні запитання щодо матеріалу уроку.

2) Запропонуйте учням/ученицям, на ваш вибір, завдання на повторення вивченого.

3) Сформулюйте практичну задачу (без розв'язання). Розв'язання пропонуємо у вигляді групової роботи наприкінці уроку.

4) Теорію подавайте стисло, акцентуйте увагу (коли можливо) на її практичному застосуванні.

5) До теоретичних тверджень наведено ілюстративні задачі. Обирайте ілюстративні задачі на власний розсуд.

6) Увесь запропонований матеріал неможливо подати в часових вимірах одного уроку, тому обирайте кількість матеріалу на власний розсуд.

7) Заплануйте розв'язання практичної задачі. Об'єднайте учнів/учениць у кілька груп. Під час розв'язання задачі групами важливо формувати комунікаційні навички, інтегрувати здобуті знання у розв'язання практичних задач.

8) Обов'язково пропонуйте учням/ученицям самотужки або в групах розв'язувати тренувальні завдання за трьома рівнями складності, на вибір учня/учениці. Формуйте навички розв'язання прикладів та задач і навчайте учнів/учениць самостійної роботи над завданнями.

9) Мотивуйте учнів/учениць до проєктної діяльності. Запропонуйте учням/ученицям обрати теми для індивідуальних (групових) проєктів. Робота над обраним проєктом може тривати впродовж вивчення всієї змістової теми. Створення проєктів та їхній захист можуть бути альтернативою контрольної роботи з теми.

10) Можливі теми для створення проєктів запропоновані. Також темами проєктів можуть бути практичні завдання за рівнями складності B або C.

I. Організаційна частина (2 хв)

Мотиваційні запитання

1) Чи можна довести, що певне твердження правильне для всіх натуральних чисел, без перевірки кожного числа окремо?

2) Уявіть, що перед вами нескінченний ланцюг доміно, які розташовані вертикально. Якщо ви штовхаєте першу кісточка і кожна кісточка збиває наступну – чи можна гарантувати, що впадуть усі? Як це пов'язано з математикою?

3) Чи можливо перевірити, що складна формула для n-го члена послідовності дійсно правильно описує всі її значення?

II. Повторення (3–4 хв)

1. Обчисліть суму $1 + 2 + \ldots + 20$.

А	Б	В	Г	Д
200	210	220	230	240

Відповідь. Б.

2. Спростіть вираз $n^2 - (n - 1)^2$.

А	Б	В	Г	Д
$2n - 1$	$n - 1$	$n + 1$	$2n + 1$	$n^2 - 1$

Відповідь. А.

3. При яких значеннях n нерівність $2n > n + 1$ є правильною?

А	Б	В	Г	Д
$n < 1$	$n > 0$	$n > 1$	$n < 0$	n – будь-яке

Відповідь. В.

4. Серед наведених рівностей оберіть тотожність:

А $n^2 + n = n(n - 1)$
Б $(n + 1)^3 - n^3 = 3n^2 + 3n + 1$
В $(n + 1)! = n! + 1$
Г $2^n + 2^{n+1} = 2^{2n}$
Д $n^3 - n = (n - 1)(n + 1)$
Відповідь. Б.

5. Спростити вираз $\frac{(n+1)!}{n!}$.

А	Б	В	Г	Д
n	$n!$	$\frac{1}{n+1}$	$n + 1$	$(n + 1)^2$

Відповідь. Г.

Як я вирішую певну проблему?

Задача. У шаховому турнірі взяли участь n шахістів. Кожний зустрівся з кожним іншим один раз, причому жодна партія не закінчилася внічию. Доведіть, що за результатами турніру всіх шахістів можна пронумерувати в такому порядку, щоб кожний попередній був переможцем наступного.

III. Застосування методу математичної індукції до числових послідовностей

Метод математичної індукції полягає в тому, що твердження, яке залежить від натурального числа n, справедливе для будь-якого $n \in N$, якщо виконуються дві умови:

а) твердження справедливе при $n = k_0$ — база індукції;

б) при будь-якому натуральному $k > k_0$ зі справедливості твердження для $n = k$ випливає його справедливість і для $n = k + 1$ — крок індукції.

Метод математичної індукції часто використовують для:

- знаходження формули загального члена деякої послідовності;
- доведення різних властивостей, що залежать від номера n;
- доведення різних нерівностей із числовими послідовностями.

Ілюстративні приклади

6. Доведіть, що при будь-якому $n \in \mathbb{N}$ виконується рівність:

$$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1).$$

Розв'язання. 1) Доведемо дану рівність за методом математичної індукції.

2) База індукції. При $n = 1$ маємо $1^2 = \frac{1}{6} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3$, що справедливо.

3) Крок індукції. Нехай при $n = k$: $1^2 + 2^2 + \ldots + k^2 = \frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)$.

Доведемо, що при $n = k + 1$: $1^2 + 2^2 + \ldots + k^2 + (k+1)^2 = \frac{1}{6}(k+1)(k+2)(2k+3)$.

4) *Доведення.* $\left(1^2+2^2+\ldots+k^2\right)+\left(k+1\right)^2 = \frac{1}{6}k\left(k+1\right)\left(2k+1\right)+\left(k+1\right)^2 =$

$= \frac{1}{6}\left(k+1\right)\left(k\left(2k+1\right)+6\left(k+1\right)\right) = \frac{1}{6}\left(k+1\right)\left(2k^2+7k+6\right) = \frac{1}{6}(k+1)(k+2)(2k+3)$.

5) Отже, при $n \in \mathbb{N}$ виконується рівність: $1^2+2^2+\ldots+n^2 = \frac{1}{6}n\left(n+1\right)\left(2n+1\right)$, що і треба було довести.

7. Знайдіть формулу для знаходження суми $S_n = 1\cdot1! + 2\cdot2! + \ldots + n\cdot n!$.

Розв'язання. 1) Обчислимо декілька сум і спробуємо знайти закономірність.

$S_1 = 1\cdot1! = 1$	$S_1 = 2! - 1$
$S_2 = 1\cdot1! + 2\cdot2! = 5$	$S_2 = 3! - 1$
$S_3 = 1\cdot1! + 2\cdot2! + 3\cdot3! = 23$	$S_3 = 4! - 1$
…	…

2) Можемо висловити гіпотезу, що $S_n = (n + 1)! - 1$. Переконаємося у цьому за методом математичної індукції.

3) *База індукції.* При $n = 1$: отримуємо правильну рівність $1 \cdot 1! = (1 + 1)! - 1$.

4) Крок індукції. Припустимо, що для $n = k$:

$S_k = (k + 1)! - 1$, тобто $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \ldots + k \cdot k! = (k + 1)! - 1$.

Доведемо, що для $n = k + 1$:

$S_{k+1} = (k + 2)! - 1$, тобто $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \ldots + k \cdot k! + (k + 1)\,(k + 1)! = (k + 2)! - 1$.

5) *Доведення.* $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \ldots + k \cdot k! + (k + 1)\,(k + 1)! = (k + 1)! - 1 + (k + 1)\,(k + 1)! =$
$= (k + 1)!(k + 2) - 1 = (k + 2)! - 1$.

6) Отже, за методом математичної індукції $S_n = (n + 1)! - 1$ при $n \in \mathbb{N}$, що і треба було довести.

8. Доведіть нерівність $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n}$ при $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

Розв'язання. 1) Доведемо дану нерівність за методом математичної індукції.

2) *База індукції.* При $n = 2$ дана нерівність правильна: $1+\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2}} > \sqrt{2}$ (тому що $1+\sqrt{2} > 2$).

3) *Крок індукції.* Нехай при $n = k$: $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{k}} > \sqrt{k}$.

Доведемо, що при $n = k + 1$: $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{k}}+\frac{1}{\sqrt{k+1}} > \sqrt{k+1}$.

4) *Доведення.* $\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{k}}\right)+\frac{1}{\sqrt{k+1}} > \sqrt{k}+\frac{1}{\sqrt{k+1}} = \frac{1+\sqrt{k\left(k+1\right)}}{\sqrt{k+1}}$.

Оскільки $\sqrt{k\left(k+1\right)} \geq k$, то $\frac{1+\sqrt{k\left(k+1\right)}}{\sqrt{k+1}} \geq \frac{1+k}{\sqrt{k+1}} = \sqrt{k+1}$.

Тобто $\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{k}}\right)+\frac{1}{\sqrt{k+1}} > \sqrt{k+1}$.

5) Отже, за методом математичної індукції $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n}$ при $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, що і треба було довести.

9. Числову послідовність (a_n), задано формулою n-го члена: $a_n = 2^n$, а числову послідовність (b_n) задає формула $b_n = n^2$. Доведіть, що кожен член послідовності (a_n), починаючи з п'ятого, більший за відповідний член послідовності (b_n).

Розв'язання. 1) Доведемо нерівність $2^n > n^2$ для $n > 4$.
2) *База індукції.* При $n = 5$: $2^5 > 5^2$, що справедливо.
3) *Крок індукції.* Нехай нерівність, що доводиться, є правильною при $n = k$, де $k > 4$, тобто $2^k > k^2$.
Доведемо, що при $n = k + 1$: $2^{k+1} > (k + 1)^2$.
4) *Доведення.* $2^{k+1} = 2^k \cdot 2 > k^2 \cdot 2 = 2k^2$.
Для $k > 4$ нерівність $2k^2 > (k + 1)^2$ є справедливою (можна довести, розв'язавши квадратну нерівність. Отже, $2^{k+1} > (k + 1)^2$.
5) Таким чином робимо висновок, що кожен член послідовності (a_n), починаючи з п'ятого, більший за відповідний член послідовності (b_n), що і треба було довести.

IV. Розв'язування практичної задачі. Групова активність

Як я вирішую певну проблему?

Задача. У шаховому турнірі взяли участь n шахістів. Кожний зустрівся з кожним іншим один раз, причому жодна партія не закінчилася внічию. Доведіть, що за результатами турніру всіх шахістів можна пронумерувати в такому порядку, щоб кожний попередній був переможцем наступного.

Розв'язання. 1) Для доведення використаємо метод математичної індукції.
2) *База індукції.* Для $n = 2$ твердження є очевидним.
3) *Крок індукції.* Нехай твердження є правильним при $n = k$ і за результатами турніру між k шахістами їх упорядкували так: $a_1, a_2, ..., a_k$.
Доведемо, що це можна зробити і при $n = k + 1$.
4) У турнірі між $(k + 1)$ шахістами розглянемо $(k + 1)$-го шахіста, який зіграв із кожним із k шахістів по одному разу. Рухаючись у записаній послідовності зліва направо, виявимо першого шахіста, у якого виграв розглядуваний шахіст, і поставимо його перед ним. Тобто, якщо a_{k+1} виграв у a_i, де $1 \le i \le k$, то впорядкована послідовність: $a_1, a_2, ..., a_{k+1}, a_i, ..., a_k$.
5) Отже, за результатами турніру всіх шахістів можна пронумерувати в такому порядку, щоб кожний попередній був переможцем наступного, що і треба було довести.

V. Тренувальні вправи. Три рівні складності: A, B, C (8–10 хв)

Рівень A

1. Послідовність задано формулою n-го члена: $a_n = n^2 + n + 17$. Обчисліть перший, другий, третій та четвертий члени цієї послідовності. Зробіть припущення. Установіть, чи є висловлена гіпотеза правильною.

2. Доведіть, що при будь-якому $n \in \mathbb{N}$ виконується рівність: $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

3. Доведіть, що при будь-якому $n \in \mathbb{N}$ виконується рівність: $\sum_{k=1}^{n}(2k-1)^2 = \frac{n(4n^2-1)}{3}$.

4. Доведіть, що при будь-якому $n \in \mathbb{N}$ виконується рівність: $\sum_{k=1}^{n} k(2k+1) = \frac{n(n+1)(4n+5)}{6}$.

5. Доведіть, що при будь-якому $n \in \mathbb{N}$ виконується рівність: $\sum_{k=1}^{n} \frac{k(k+3)}{(k+1)(k+2)} = \frac{n(n+1)}{n+2}$.

6. Доведіть, що при будь-якому натуральному n виконується рівність:

$$\left(1-\frac{4}{1}\right)\left(1-\frac{4}{9}\right)\left(1-\frac{4}{25}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{4}{(2n-1)^2}\right) = \frac{1+2n}{1-2n}.$$

7. Доведіть, що при будь-якому натуральному $n \geq 2$ виконується рівність

$$\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\left(1-\frac{1}{16}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{n^2}\right) = \frac{n+1}{2n}.$$

8. Доведіть, що при будь-якому $n \in \mathbb{N}$ виконується рівність:

$$\frac{1}{2}+\frac{3}{4}+\frac{5}{8}+\ldots+\frac{2n-3}{2^{n-1}}+\frac{2n-1}{2^n} = 3-\frac{2n+3}{2^n}.$$

Рівень B

1. Знайдіть формулу для обчислення значення суми $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}$, де $n \in \mathbb{N}$.

2. Знайдіть формулу для обчислення значення суми $-1+3-5+7-9+\ldots+(-1)^n\cdot(2n-1)$, де $n \in \mathbb{N}$.

3. Знайдіть формулу для обчислення значення суми $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}$, де $n \in \mathbb{N}$.

4. Доведіть нерівність: $\frac{x_1^2}{y_1}+\frac{x_2^2}{y_2}+\ldots+\frac{x_n^2}{y_n} \geqslant \frac{(x_1+x_2+\ldots+x_n)^2}{y_1+y_2+\ldots+y_n}$, де y_1, y_2, …, y_n – додатні числа.

5. Доведіть нерівність: $|a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n| \leq |a_1|+|a_2|+|a_3|+\ldots+|a_n|$, де $n \in \mathbb{N}$.

6. Доведіть нерівність: $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{n+n} > \frac{13}{24}$, де $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

7. Послідовність (a_n) задано рекурентно: $a_1 = -13$, $a_{n+1} = a_n + 3n$.

Доведіть, що $a_n = \frac{(3n-29)n}{2}$ — формула n-го члена для даної послідовності.

8. Послідовність (a_n) задано рекурентно: $a_1 = 0$, $a_{n+1} = a_n + n^2$.

Доведіть, що $a_n = \frac{(n-1)n(2n-1)}{6}$ — формула n-го члена для даної послідовності.

Рівень C

1. Доведіть нерівність:

1) $\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}}}_{n} < 2$;

2) $\underbrace{\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6+\ldots+\sqrt{6}}}}}_{n} < 3$.

2. Доведіть нерівність $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}} > 2\sqrt{n+1}-2$, де $n \in \mathbb{N}$.

3. Доведіть нерівність $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}} < 2\sqrt{n}$, де $n \in \mathbb{N}$.

4. Доведіть нерівність $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n} > \frac{13}{24}$, де $n \in \mathbb{N}, n \geqslant 2$.

5. Доведіть нерівність $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ldots\cdot\frac{2n-1}{2n} \leqslant \frac{1}{\sqrt{3n+1}}$, де $n \in \mathbb{N}$.

6. Доведіть подвійну нерівність $\frac{n(1+\sqrt{n})}{2} \le \sum_{k=1}^{n}\sqrt{k} \le n\cdot\sqrt{\frac{n+1}{2}}$, де $n \in \mathbb{N}$.

7. Послідовність (a_n) задано рекурентно: $a_1 = 0$, $a_{n+1} = a_n + n$. Знайдіть формулу n-го члена для даної послідовності.

8. Послідовність (a_n) задано рекурентно: $a_1 = 0$, $a_{n+1} = a_n + n^3$. Знайдіть формулу n-го члена для даної послідовності.

VI. Рефлексія (2 хв)

1. Я можу пояснити, що таке метод математичної індукції.

☐ Так ☐ Ще треба потренуватися ☐ Ні

2. Я розумію, чому перевірка першого кроку (бази індукції) важлива.

☐ Так ☐ Ще треба потренуватися ☐ Ні

3. Я можу сформулювати припущення індукції для доведення твердження.

☐ Так ☐ Ще треба потренуватися ☐ Ні

4. Я можу показати, як перейти від k-го члена послідовності до $(k + 1)$-го у доведенні.

☐ Так ☐ Ще треба потренуватися ☐ Ні

5. Я розумію, як застосовувати метод індукції до формул для сум послідовностей.

☐ Так ☐ Ще треба потренуватися ☐ Ні

6. Я можу застосувати метод індукції до рекурентних послідовностей.

☐ Так ☐ Ще треба потренуватися ☐ Ні

7. Я відчуваю, що можу самостійно перевірити просту тотожність для всіх n.

☐ Так ☐ Ще треба потренуватися ☐ Ні

8. Я можу пояснити, чому індукція дозволяє довести твердження для всіх натуральних чисел, а не тільки для кількох прикладів.

☐ Так ☐ Ще треба потренуватися ☐ Ні

9. Я розумію, чим метод індукції відрізняється від простого підрахунку або перевірки конкретних випадків.

☐ Так ☐ Ще треба потренуватися ☐ Ні

10. Я готовий/готова спробувати довести власну формулу для послідовності методом індукції.

☐ Так ☐ Ще треба потренуватися ☐ Ні

Можливі теми проєктів

1. Історія виникнення методу математичної індукції та цікаві факти.
2. Розробка ігор та головоломок за допомогою послідовностей.
3. Метод математичної індукції для послідовностей, заданих рекурентно.

Список використаної літератури

1) Мерзляк А. Г. Алгебра для загальноосвітніх навчальних закладів з поглибленим вивченням математики : підручн. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закладів / А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонський, М. С. Якір. – Х. : Гімназія, 2017.
2) Мерзляк А. Г. Алгебра і початки аналізу : початок вивчення на поглиб. рівні з 8 кл., проф. рівень : підручн. для 10 кл. закладів загальної середньої освіти / А. Г. Мерзляк, Д. А. Номіровський, В. Б. Полонський, М. С. Якір. – Х. : Гімназія, 2018.
3) Семенов В. О. Доведення нерівностей. Числові послідовності: скінченні суми і добутки. Книга 1. – Х. : Вид. група «Основа», 2009. – 128 с. – (Б-ка журн. «Математика в школах України»; Вип. 6 (78)).
4) Ушаков Р. П. Повторювальний курс математики: Посібник для учнів. За ред. М. Й. Ядренка. – К.: Техніка. 1999.