

Тема 4.

Числові послідовності. Границі числових послідовностей

Урок 7. **Монотонність та обмеженість числових послідовностей**

План уроку

1. Монотонність числових послідовностей.
2. Обмеженість числових послідовностей.

Очікувані результати навчальних досягнень

Учень/учениця:

визначає межі даних, формулює припущення щодо даних у специфічних проблемних ситуаціях [12 МАО 1.2.3–1 П];

обирає серед кількох різних стратегій розв'язання специфічних проблемних ситуацій таку, що задовольняє певні умови [12 МАО 2.2.2–1 П];

здійснює перехід від абстрактного до конкретного та від конкретного до абстрактного [12 МАО 2.3.1–2 П];

визначає, яких даних недостатньо чи є надлишкові дані, під час розв'язання специфічної проблемної ситуації [12 МАО 3.1.2–1 П];

добирає доцільні математичні поняття, факти і послідовність дій для розв'язання проблемних ситуацій [12 МАО 4.2.1–1 П].

Дружні поради вчителю/вчительці до уроку

- 1) Сформулюйте учням/ученицям мотиваційні запитання щодо матеріалу уроку.
- 2) Запропонуйте учням/ученицям, на ваш вибір, завдання на повторення вивченого.
- 3) Сформулюйте практичну задачу (без розв'язання). Розв'язання пропонуємо у вигляді групової роботи наприкінці уроку.
- 4) Теорію подавайте стисло, акцентуйте увагу (коли можливо) на її практичному застосуванні.

- 5) До теоретичних тверджень наведено ілюстративні задачі. Обирайте ілюстративні задачі на власний розсуд.
- 6) Увесь запропонований матеріал неможливо подати в часових вимірах одного уроку, тому обирайте кількість матеріалу на власний розсуд.
- 7) Обов'язково пропонуйте розв'язання практичної задачі. Об'єднайте учнів/учениць у кілька груп. Під час розв'язання задачі групами важливо формувати комунікаційні навички, знаходити математичного партнера, з яким під силу розв'язати задачу, інтегрувати здобуті знання у розв'язання практичних задач.
- 8) Обов'язково пропонуйте учням/ученицям самотужки або в групах розв'язувати тренувальні завдання за трьома рівнями складності, на вибір учня/учениці. Формуйте навички розв'язання прикладів та задач та навчайте учнів/учениць самостійної роботи над завданнями.
- 9) Мотивуйте учнів/учениць до проєктної діяльності. Запропонуйте учням/ученицям обрати теми для індивідуальних (групових) проєктів. Робота над обраним проєктом може тривати упродовж вивчення (повторення) усієї змістової теми. Створення проєктів та їхній захист можуть бути альтернативою контрольної роботи з теми.
- 10) Темати проєктів можуть бути практичні завдання за рівнями складності В або С. Якщо учень/учениця розв'язали завдання рівня А, то для проєкту вони можуть обрати рівні В або С. Можливі теми для створення проєктів запропоновані.
- 11) Запропонуйте учням/ученицям дати відповіді на запитання для рефлексії.

I. Організаційна частина (2 хв)

Мотиваційні запитання

- 1) Чи помічаєте ви певну закономірність у числовій послідовності 1, 2, 3, 4, 5, ... ? Чи буде серед її наступних членів число -3 ? Чому?
- 2) Якщо у деякій числовій послідовності (a_n) відомо, що $a_3 < a_4$, то чи можна стверджувати, що $a_4 < a_5$?
- 3) Чи може бути число 0 найбільшим елементом серед усіх у деякій послідовності?
- 4) Чи може бути число 0 найменшим елементом серед усіх у деякій послідовності?
- 5) Чи зустрічали ви послідовності, серед елементів яких не існує найменшого та найбільшого?

II. Повторення (3–4 хв)

1. Яка з формул описує послідовність: 2; 4; 8; 16; 32; ... ?

А	Б	В	Г	Д
$q_n = 2n$	$q_n = n^2$	$q_n = 2^n$	$q_n = 2n^2$	$q_n = (2n)^2$

Відповідь. В.

2. Деяку послідовність задано формулою n -го члена $c_n = n^2$. Оберіть правильне співвідношення.

А	Б	В	Г	Д
$c_2 > c_3$	$c_3 = c_4$	$c_4 < c_5$	$c_5 \geq c_6$	$c_6 > c_7$

Відповідь. В.

3. $d_n = 3n + 1$ — загальний член деякої послідовності (d_n) . Обчисліть $d_5 - d_4$.

А	Б	В	Г	Д
2	3	4	5	6

Відповідь. Б.

4. Послідовність (b_n) задано формулою n -го члена $b_n = \frac{n}{n+1}$. Який із варіантів правильно описує перші 5 членів цієї послідовності?

А	Б	В	Г	Д
значення зростають	значення спадають	значення залишаються однаковими	перші три значення зростають, а інші спадають	перші три значення спадають, а інші зростають

Відповідь. А.

5. Скоротіть дріб: $\frac{2-3\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$.

А	Б	В	Г	Д
$\sqrt{2} - 3$	-1	$-2\sqrt{2}$	$3 - \sqrt{2}$	інша відповідь

Відповідь. А.

Як я вирішую певну проблему?

- Задача.** Спортсмен щодня збільшує свій час бігу на доріжці: першого дня — 14 хв, другого — 18 хв, третього — 20 хв. Починаючи з четвертого дня кожне збільшення стає на 20 секунд меншим, ніж попереднє. Нехай a_n — час бігу на n -ий день.
- Дослідіть, чи є послідовність (a_n) монотонною.
 - Чи досягне спортсмен деякого максимального часу?
 - Чи є послідовність (a_n) обмеженою?

III. Монотонність числових послідовностей

Означення. Числову послідовність (a_n) називають **зростаючою**, якщо для будь-якого $n \in \mathbb{N}$ виконується нерівність: $a_{n+1} > a_n$.

Означення. Числову послідовність (a_n) називають **спадною**, якщо для будь-якого $n \in \mathbb{N}$ виконується нерівність: $a_{n+1} < a_n$.

Наприклад, послідовність (a_n) , де $a_n = n^2$ — зростаюча, оскільки $\forall n \in \mathbb{N}: (n+1)^2 > n^2$, отже, $a_{n+1} > a_n$, послідовність (b_n) , де $b_n = \frac{1}{n}$ — спадна, оскільки $\forall n \in \mathbb{N}: \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$, тобто $b_{n+1} < b_n$.

Означення. Числову послідовність (a_n) називають **неспадною**, якщо для будь-якого $n \in \mathbb{N}$ виконується нерівність: $a_{n+1} \geq a_n$.

Означення. Числову послідовність (a_n) називають **незростаючою**, якщо для будь-якого $n \in \mathbb{N}$ виконується нерівність: $a_{n+1} \leq a_n$.

Означення. Зростаючі, спадні, незростаючі і неспадні числові послідовності називають **монотонними**.

Ілюстративні приклади

6. Доведіть, що послідовність, яку задано формулою $a_n = \frac{n}{2^n}$, є незростаючою.

Розв'язання. I спосіб. 1) $a_n - a_{n+1} = \frac{n}{2^n} - \frac{n+1}{2^{n+1}} = \frac{2n - n - 1}{2^{n+1}} = \frac{n-1}{2^{n+1}} \geq 0$.

2) Таким чином, для будь-якого натурального числа n виконується нерівність: $a_n - a_{n+1} \geq 0$, тобто: $a_{n+1} \leq a_n$. Отже, дана послідовність є незростаючою, що і треба було довести.

II спосіб. 1) Оскільки всі члени послідовності є додатними числами, то для дослідження послідовності на монотонність можна порівняти відношення $\frac{a_n}{a_{n+1}}$ з одиницею.

$$2) \frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{\frac{n}{2^n}}{\frac{n+1}{2^{n+1}}} = \frac{n \cdot 2^{n+1}}{(n+1) \cdot 2^n} = \frac{n \cdot 2^n \cdot 2}{(n+1) \cdot 2^n} = \frac{2n}{n+1} = \frac{n+1}{n+1} + \frac{n-1}{n+1} = 1 + \frac{n-1}{n+1}.$$

3) Оскільки для всіх натуральних значень n виконується нерівність $\frac{n-1}{n+1} \geq 0$, тобто $1 + \frac{n-1}{n+1} \geq 1$, то: $\frac{a_n}{a_{n+1}} \geq 1$. З огляду на те, що $a_{n+1} > 0$, отримуємо: $a_n \geq a_{n+1}$ і дана послідовність є незростаючою, що і треба було довести.

7. Доведіть, що послідовність (a_n) , де $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ є монотонною.

Розв'язання. 1) Маємо: $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}},$

аналогічно: $a_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}}.$

2) Таким чином:

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}} - \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{-(\sqrt{n+2} - \sqrt{n})}{(\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})} < 0, \text{ тобто}$$

дана послідовність спадна, що і треба було довести.

IV. Обмеженість числових послідовностей

Означення. Числову послідовність (a_n) називають **обмеженою зверху**, якщо існує таке число M , що для будь-якого натурального числа n виконується нерівність: $a_n \leq M$.

Означення. Числову послідовність (a_n) називають **обмеженою знизу**, якщо існує таке число m , що для будь-якого натурального числа n виконується нерівність: $a_n \geq m$.

Означення. Послідовність називають **обмеженою**, якщо вона обмежена і знизу, і зверху, тобто якщо існують числа m та M такі, що для будь-якого натурального числа n виконується нерівність: $m \leq a_n \leq M$.

Правильним також є наступне означення.

Означення. Послідовність називають **обмеженою**, якщо існує додатне число M таке, що для всіх членів послідовності має місце нерівність $|a_n| \leq M$.

Наприклад, послідовність, яку задано формулою $a_n = \frac{n}{n+1}$, є **обмеженою**. Справді,

для будь-якого натурального числа n виконується подвійна нерівність: $0 < \frac{n}{n+1} < 1$,

а також: $\left| \frac{n}{n+1} \right| < 1$.

Послідовності, задані формулами $b_n = n$, $c_n = -n!$ є прикладами **необмежених** послідовностей.

Ілюстративні приклади

8. Доведіть, що послідовність, яку задано формулою $a_n = \frac{10\sqrt{n}}{n+25}$ є обмеженою.

Розв'язання. І спосіб. 1) Оскільки $a_n > 0$ для будь-якого $n \in \mathbb{N}$, то дана послідовність є обмеженою знизу.

2) Покажемо, що ця послідовність обмежена зверху. Застосувавши нерівність

Коші до чисел n і 25 , отримуємо: $\frac{10\sqrt{n}}{n+25} \leq \frac{10\sqrt{n}}{2\sqrt{25n}} = 1$.

3) Отже, для будь-якого натурального числа n маємо: $a_n \leq 1$. Таким чином дана послідовність є обмеженою, що і треба було довести.

II спосіб. 1) Для всіх натуральних чисел n бачимо, що:

$$\left| \frac{10\sqrt{n}}{n+25} \right| = \frac{10\sqrt{n}}{n+25} \leq \frac{10\sqrt{n}}{2\sqrt{25n}} = 1.$$

2) Отже, $\left| \frac{10\sqrt{n}}{n+25} \right| \leq 1$ і дана послідовність є обмеженою, що і треба було довести.

9. Доведіть, що послідовність, задана формулою $x_n = 5^n - 4^n$ є необмеженою.

Розв'язання. 1) За допомогою методу математичної індукції доведемо, що $5^n - 4^n \geq n$ для всіх $n \in \mathbb{N}$.

2) **База індукції.** При $n = 1$ нерівність є правильною. Справді, $5^1 - 4^1 \geq 1$.

3) **Крок індукції.** Нехай при деякому $n = k$ має місце нерівність $5^k - 4^k \geq k$.

Доведемо, що при $n = k + 1$ виконується нерівність $5^{k+1} - 4^{k+1} \geq k + 1$.

4) **Доведення.** $5^{k+1} - 4^{k+1} = 5 \cdot 5^k - 4 \cdot 4^k = 5^k + 4(5^k - 4^k) \geq 5^k + 4k > k + 1$.

5) За методом математичної індукції нерівність $5^n - 4^n \geq n$ встановлено для всіх $n \in \mathbb{N}$. Доведена нерівність означає, що послідовність (x_n) необмежена зверху, тобто не можна вказати таку сталу M , для якої нерівність $5^n - 4^n \leq M$ виконувалася б для всіх $n \in \mathbb{N}$.

V. Розв'язання практичної задачі. Групова активність (7–8 хв)

Як я вирішую певну проблему?

Задача. Спортсмен щодня збільшує свій час бігу на доріжці: першого дня — 14 хв, другого — 18 хв, третього — 20 хв. Починаючи з четвертого дня кожне збільшення стає на 20 секунд меншим, ніж попереднє. Нехай a_n — час бігу на n -ий день.

I. Дослідіть, чи є послідовність (a_n) монотонною.

II. Чи досягне спортсмен деякого максимального часу?

III. Чи є послідовність (a_n) обмеженою?

Розв'язання. 1) $a_1 = 14$ хв, $a_2 = 18$ хв, $a_3 = 20$ хв.

2) Починаючи з 4-го дня кожне збільшення часу стає на 20 секунд менше за попереднє. Зауважимо, що $20 \text{ с} = \frac{1}{3} \text{ хв}$.

3) Позначимо різницю між сусідніми днями: $D_k = a_{k+1} - a_k$.

4) Тоді $\Delta_1 = 4$, $\Delta_2 = 2$ і для $k \geq 3$: $\Delta_k = \Delta_{k-1} - \frac{1}{3}$, або $\Delta_k = 2 - \frac{k-2}{3}$.

5) Таким чином, перші прирости та перші члени послідовності (a_n) :

$$\begin{array}{ll} a_1 = 14, & \\ \Delta_1 = 4, & a_2 = 18, \\ \Delta_2 = 2, & a_3 = 18 + \Delta_2 = 20, \\ \Delta_3 = 2 - \frac{1}{3} = \frac{5}{3}, & a_4 = 20 + \Delta_3 = 21\frac{2}{3}, \\ \Delta_4 = 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}, & a_5 = 21\frac{2}{3} + \Delta_4 = 23, \\ \Delta_5 = 2 - 1 = 1, & a_6 = 23 + \Delta_5 = 24, \\ \Delta_6 = 2 - \frac{4}{3} = \frac{2}{3}, & a_7 = 24 + \Delta_6 = 24\frac{2}{3}, \end{array}$$

$$\begin{aligned}\Delta_7 &= 2 - \frac{5}{3} = \frac{1}{3}, & a_8 &= 24\frac{2}{3} + \Delta_7 = 25, \\ \Delta_8 &= 2 - 2 = 0, & a_9 &= 25 + \Delta_8 = 25, \\ \Delta_9 &= 2 - \frac{7}{3} = -\frac{1}{3}, & a_{10} &= 25 + \Delta_9 = 24\frac{2}{3}, \\ \dots & & \dots & \end{aligned}$$

6) Отже, дана послідовність спочатку зростала, а далі спадає, тому вона не є монотонною на всій множині індексів. Максимум часу, якого досягне спортсмен, дорівнює 25 хв — досягається на 8-й і 9-й день ($a_8 = a_9 = 25$ хв). Після цього час починає зменшуватись. Враховуючи, що число 25 — максимально значущий член послідовності, то вона обмежена зверху.

Відповідь. I. Ні. II. Так, 25 хв. III. Так.

VI. Тренувальні вправи. Три рівні складності: А, В, С (8–10 хв)

Рівень А

1. Доведіть, що послідовність (a_n) є зростаючою, якщо:

$$\begin{aligned}1) a_n &= 5n - 12; & 4) a_n &= \frac{n}{n+1}; & 2) a_n &= n^2 + n - 1; \\ 5) a_n &= \frac{3n+1}{n+1}; & 3) a_n &= 3^n - 2^n; & 6) a_n &= \frac{3^n}{n+1}.\end{aligned}$$

2. Доведіть, що послідовність (a_n) є спадною, якщо:

$$\begin{aligned}1) a_n &= 11 - 3n; & 4) a_n &= \frac{n+1}{2n+1}; & 2) a_n &= -n^2 + n + 1; \\ 5) a_n &= \frac{n}{4^n}; & 3) a_n &= \frac{n+1}{n};\end{aligned}$$

3. Доведіть, що послідовність (a_n) не є монотонною, якщо:

$$\begin{aligned}1) a_n &= (-1)^n; & 4) a_n &= n^{(-1)^n}; & 2) a_n &= (n-4)^2; \\ 5) a_n &= n + (-1)^n; & 3) a_n &= \sin \frac{\pi n}{2}; & 6) a_n &= \sin n^\circ.\end{aligned}$$

4. Доведіть, що послідовність (a_n) не є монотонною, якщо:

$$1) a_n = |n - 3|; \quad 3) a_n = n - (-1)^n; \quad 2) a_n = \cos \frac{\pi n}{2}; \quad 4) a_n = (1 + (-1)^n)n.$$

5. Наведіть приклад послідовності (a_n) з найменшим членом a_{15} .

6. Наведіть приклад послідовності (a_n) з найбільшим членом a_{25} .

7. Дослідіть на монотонність послідовність, задану формулою:

$$1) a_n = [\sqrt{n}]; \quad 2) a_n = \frac{n^3}{2^n}; \quad 3) a_n = \frac{100^n}{n!}.$$

Рівень В

1. Доведіть, що послідовність (a_n) обмежена зверху:

$$\begin{aligned}1) a_n &= 12 - n^2; & 2) a_n &= \frac{2n+7}{n+2}; & 3) a_n &= -n^2 + 2n - 4; \\ 4) a_n &= \frac{3n^2-1}{n^2+1}; & 5) a_n &= \frac{4n}{n^2+1}; & 6) a_n &= \frac{n-1}{\sqrt{n^2+1}}.\end{aligned}$$

- 2.** Доведіть, що послідовність (a_n) обмежена знизу:
- 1) $a_n = n^3 - 8n$;
 - 2) $a_n = \frac{1-2n}{n}$.
- 3.** Доведіть, що послідовність (x_n) є необмеженою:
- 1) $x_n = (-1)^n n$;
 - 2) $x_n = \frac{n}{n+1+(-1)^n n}$.
- 4.** Чи є обмеженою послідовність (x_n) , задана формулою n -го члена:
- 1) $x_n = n^{(-1)^n}$;
 - 2) $x_n = \frac{n^2}{(n+1)^2 + (-1)^n n^2}$?
- 5.** Доведіть, що послідовність (a_n) є обмеженою тоді й тільки тоді, коли існує таке число $M > 0$, що для всіх $n \in \mathbb{N}$ виконується нерівність $|a_n| \leq M$.
- 6.** Для членів послідовностей (a_n) і (b_n) при кожному $n \in \mathbb{N}$ виконується нерівність $a_n \leq b_n$. Чи є правильним твердження:
- 1) якщо послідовність (a_n) обмежена знизу, то й послідовність (b_n) обмежена знизу;
 - 2) якщо послідовність (b_n) обмежена знизу, то й послідовність (a_n) обмежена знизу;
 - 3) якщо послідовність (a_n) обмежена зверху, то й послідовність (b_n) обмежена зверху;
 - 4) якщо послідовність (b_n) обмежена зверху, то й послідовність (a_n) обмежена зверху?
- 7.** Послідовності (a_n) і (b_n) обмежені. Чи можна стверджувати, що обмеженою буде послідовність (c_n) , задана формулою:
- 1) $c_n = a_n + b_n$;
 - 2) $c_n = a_n - b_n$;
 - 3) $c_n = a_n b_n$;
 - 4) $c_n = \frac{a_n}{b_n}$, якщо $b_n \neq 0$?
- 8.** Знайдіть найбільший член послідовності, заданої формулою:
- 1) $a_n = 3 - \left(n - \frac{7}{3}\right)^2$;
 - 2) $a_n = \frac{2n+1}{2n-5}$;
 - 3) $a_n = \frac{6\sqrt{n}}{n+9}$;
 - 4) $a_n = \frac{20}{n^2 - 4n + 24}$.
- 9.** Знайдіть найменший член послідовності, заданої формулою:
- 1) $a_n = n^2 - 4n + 1$;
 - 2) $a_n = n + 3 \cos \pi n$;
 - 3) $a_n = n + \frac{4}{n}$;
 - 4) $a_n = \frac{(n+3)(n+12)}{n}$;
 - 5) $a_n = 2 - \frac{3}{n^2 - 4n + 5}$;
 - 6) $a_n = \frac{6n-11}{3n-8}$.

Рівень С

- 1.** Чи існує необмежена послідовність, яка для кожного $k \in \mathbb{N}$ містить k послідовних членів, рівних між собою?
- 2.** Чи існує послідовність (a_n) натуральних чисел така, що для кожного $k \in \mathbb{N}$ усі члени послідовності (a_n) , крім, можливо, скінченної кількості, діляться націло на k ?
- 3.** Чи є обмеженою послідовність:
- 1) $x_n = n^4 - 7n^3$;
 - 2) $x_n = 4^n - 3^n$?
- 4.** Доведіть, що дана послідовність є необмеженою:
- 1) $x_n = n - n^3$;
 - 2) $x_n = 2^n - 7^n$.
- 5.** Доведіть, що послідовність (a_n) є обмеженою, якщо:
- 1) $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$;
 - 2) $a_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)}$.

6. Чи є обмеженою послідовність (t_n) , якщо t_n — кількість натуральних дільників числа n ?
7. Нехай $s(n)$ — сума всіх натуральних дільників числа n . Доведіть, що послідовність, задана формулою n -го члена $\frac{\sigma_n}{\sqrt{n}}$, є необмеженою.
8. Чи існує послідовність така, що кожне раціональне число є деяким її членом?
9. Чи існує послідовність така, що кожний проміжок $(a; b)$ містить нескінченну кількість її членів?
- 10*. Доведіть, що послідовність (a_n) є обмеженою, якщо:

$$1) a_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2};$$

$$2) a_n = \underbrace{\sqrt{5 + \sqrt{5 + \sqrt{\dots + \sqrt{5}}}}}_n.$$

VII. Рефлексія (1 хв)

- 1) Я сьогодні навчився/навчилась
-
-
- 2) Мені здалося цікавим
-
-
- 3) У мене залишилися запитання щодо
-
-

Можливі теми проєктів

1. Монотонність та обмеженість числових послідовностей.
2. Побудова та аналіз графіків послідовностей.
3. Моделювання числових послідовностей у задачах.

Список використаної літератури

- 1) Ключко І. Я. Математика: тестові завдання. Ч. II. Алгебра і початки аналізу (зовнішнє незалежне оцінювання) / І. Я. Ключко. — Тернопіль: Навчальна книга — Богдан, 2021.
- 2) Мерзляк А. Г. Алгебра і початки аналізу : початок вивчення на поглиб. рівні з 8 кл., проф. рівень : підручн. для 10 кл. закладів загальної середньої освіти / А. Г. Мерзляк, Д. А. Номіровський, В. Б. Полонський, М. С. Якір. — Х. : Гімназія, 2018.
- 3) Харік О. Ю. Елементи математичного аналізу для школярів. Частина 1. / О.Ю. Харік. Єременко. — Х. : Вид. група «Основа», 2011. — 111, [1] с. (Б-ка журн. «Математика в школах України» ; Вип. 10 (106)).