

Тема 4.

Числові послідовності.

Границі числових послідовностей

Урок 8. Урок–практикум. Числові послідовності

РОБОЧИЙ АРКУШ

(моє ім'я)

I. Очікувані результати навчальних досягнень

На уроці ви навчитеся:

- 1) визначати періодичність числових послідовностей;
- 2) застосовувати періодичні послідовності для розв'язування практичних задач;
- 3) визначати обмеженість та необмеженість числових послідовностей;
- 4) доводити монотонність послідовностей;
- 5) аналізувати послідовності за їхніми властивостями;
- 6) використовувати отримані знання для розв'язання практичних та математичних задач.

II. Повторення

1. Для чисел $a = 1$, $b = \sqrt{2}$, $c = \sqrt[3]{3}$ оберіть правильне співвідношення.

А	Б	В	Г	Д
$a < b < c$	$b < c < a$	$c < a < b$	$a < c < b$	$c < b < a$

2. Знайдіть найбільше значення функції $y = -x^2 + 8x - 16$.

А	Б	В	Г	Д
0	4	-4	-16	не існує

3. Яка з функцій монотонно зростає на всій своїй області визначення?

А	Б	В	Г	Д
$y = x^{-2}$	$y = x^{-\frac{2}{3}}$	$y = 2x^4$	$y = \sqrt[4]{x^3}$	$y = -0,5x^5$

4. Вкажіть кількість нулів функції $y = \operatorname{ctg} x$ на проміжку $[-\pi; \pi]$.

А	Б	В	Г	Д
один	два	три	більше трьох	жодного

5. Чому може дорівнювати остача від ділення числа n^4 на 5, де $n \in \mathbb{Z}$?

А	Б	В	Г	Д
тільки 0	тільки 1	тільки 0 або 1	тільки 0, 1, 2	0, 1, 2, 3, 4

III. Періодичні числові послідовності

Означення. Числову послідовність, для якої існує таке натуральне число T (період), що $a_{n+T} = a_n$ для всіх $n \in \mathbb{N}$, називають **періодичною**.

Тобто, починаючи з певного номера (або з самого початку), значення послідовності повторюються через кожних T членів.

Означення. Числову послідовність, для якої не існує жодного натурального числа T , що задовольняє умову $a_{n+T} = a_n$ для всіх $n \in \mathbb{N}$, називають **неперіодичною**.

Тобто, починаючи з певного номера (або з самого початку), значення послідовності повторюються через кожних T членів.

Приклад 1. Чи є послідовність (a_n) , де $a_n = (-1)^n$ періодичною? Знайдіть її найменший додатний період.

IV. Розв'язування завдань різного рівня складності на тему «Числові послідовності»

Тема «Числові послідовності» охоплює важливі характеристики, що дозволяють глибше зрозуміти поведінку послідовностей та їх властивості, а власне визначати монотонність (зростання чи спадання), обмеженість (наявність меж зверху чи знизу) та періодичність (повторюваність членів через певний інтервал). Ці поняття є ключовими для аналізу складних числових моделей, дослідження реальних процесів і підготовки до вивчення більш глибоких тем алгебри та математичного аналізу.

Виконуючи вправи з цих тем, звертайте увагу не лише на формальні обчислення, а й на логіку зміни членів послідовності та загальні закономірності. Це допоможе вам

VI. Тренувальні вправи. Три рівні складності: А, В, С

Рівень А

1. Знайдіть перші п'ять членів послідовності, заданої формулою загального члена:

- 1) $a_n = -2$; 2) $a_n = \frac{n-1}{n}$; 3) $a_n = \frac{1}{n}$; 4) $a_n = 2^n + 3^n$;
5) $a_n = [n^2]$; 6) $a_n = \frac{1}{[n]}$; 7) $a_n = (-1)^n$; 8) $a_n = \frac{2^n}{n^2}$.

2. Знайдіть п'ять перших членів послідовності, заданої рекурентно:

- 1) $a_1 = 1, a_{n+1} = 2a_n$; 2) $a_1 = 3, a_{n+1} = a_n - n$;
3) $a_1 = 2, a_{n+1} = 2a_n$; 4) $a_1 = 1, a_{n+1} = \frac{a_n}{n}$;
5) $a_1 = a_2 = 1, a_{n+2} = a_{n+1}a_n$; 6) $a_1 = -1, a_{n+1} = \frac{1}{a_n}$;
7) $a_1 = -2, a_{n+1} = \frac{a_n - 1}{n}$; 8) $a_1 = 1, a_2 = -2, a_{n+2} = \frac{a_{n+1}}{a_n}$.

3. Доведіть, що послідовність (a_n) , яку задано формулою загального члена, є спадною:

- 1) $a_n = 11 - 3n$; 2) $a_n = \frac{1}{n^2}$; 3) $a_n = \frac{n+1}{2n-1}$;
4) $a_n = -n^2 + n - 1$; 5) $a_n = \frac{n+1}{n}$; 6) $a_n = \frac{2n}{n^2+1}$.

4. Доведіть, що послідовність (a_n) , яку задано формулою загального члена, є зростаючою:

- 1) $a_n = 5n - 12$; 2) $a_n = \frac{n}{n+1}$; 3) $a_n = n^2 + n - 1$;
4) $a_n = \frac{3n+5}{n+3}$; 5) $a_n = 4^n - 2^n$; 6) $a_n = 3^{n+1}$.

5. Доведіть, що послідовність (a_n) є обмеженою зверху:

- 1) $a_n = -n^2 - n$; 2) $a_n = \frac{n+3}{n+5}$;
3) $a_n = -n^2 + 2n - 4$; 4) $a_n = \frac{3n^2-1}{n^2+1}$;
5) $a_n = -n^2 + 5n - \frac{1}{2}$; 6) $a_n = \sqrt[3]{n+2} - \sqrt[3]{n+1}$;
7) $a_n = 5n - n^3$; 8) $a_n = \frac{n}{3^n}$.

6. Доведіть, що послідовність (a_n) є обмеженою знизу:

- 1) $a_n = n^2 + n + 1$; 2) $a_n = n + \frac{5}{n}$;
3) $a_n = 2n^2 - n + 4$; 4) $a_n = n^2 - n + \frac{2}{n^2 - n}$;
5) $a_n = n^2 - 5n + 2$; 6) $a_n = n^3 - 8n$;
7) $a_n = \frac{2n-9}{n+3}$; 8) $a_n = n^3 - 6n + 2$.

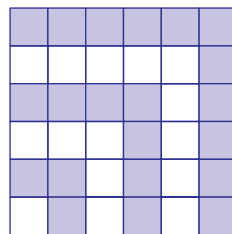
7. Дослідіть числові функції на періодичність:

1) $a_n = \sin \frac{\pi}{4} n$;

2) $a_n = n^2 - 1$;

3) $a_n = \sin n$.

8. Обчисліть суму n перших непарних чисел. Сформулюйте гіпотезу і перевірте її, використавши рисунок (див. рисунок).



Рівень В

1. Чи може число a бути членом даної послідовності? У випадку позитивної відповіді знайдіть номер цього члена.

1) $a = 1, a_n = n^2 - 4n + 5$;

2) $a = 2, a_n = 2 \sin \frac{n}{2}$;

3) $a = 1, a_n = n^2 - 4n + 3$;

4) $a = 0, a_n = \sin \frac{n-1}{2}$;

5) $a = 2, a_n = 2n^2 - 3n + 5$;

6) $a = 1, a_n = \cos \pi n$;

7) $a = -1, a_n = n^2 - n - 1$;

8) $a = 5, a_n = 3^n + 1$.

2. Підберіть одну з можливих формул загального члена послідовності, першими членами якої є числа:

1) 4, 9, 16, 25, 36, ...;

2) $-2, -\frac{1}{2}, -\frac{4}{3}, -\frac{3}{4}, -\frac{6}{5}, -\frac{5}{6}, \dots$;

3) 4, 16, 36, 64, 100, ...;

4) 0, 1, 0, 1, 0, ...;

5) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \dots$;

6) 1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, 0, ...;

7) $2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \frac{6}{5}, \dots$;

8) 0, -1, 0, 1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, 0, 1, ...;

9) 1, -1, 1, -1, 1, ...;

10) $1, 2, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{5}{24}, \dots$.

3. Дослідіть на монотонність послідовність, яка задана формулою:

1) $a_n = \frac{n+2}{1,5n+4}$;

2) $a_n = \frac{n^3}{2^n}$;

3) $a_n = n + (-1)^n$;

4) $a_n = \frac{7^{n+1}}{n!}$;

5) $a_n = \frac{2^n}{n}$;

6) $a_n = (1 + (-1)^n)n$;

7) $a_n = |n - 3|$;

8) $a_n = (-1)^n$.

4. Дано послідовність $a_1 = a, a_{n+1} = 5a_n$. З'ясуйте при яких значеннях параметра a ця послідовність буде зростаючою?

5. Доведіть, що послідовність (a_n) обмежена:

1) $a_n = (-1)^n$;

2) $a_n = \frac{n^2 + 3}{n^2 + 4n + 5}$;

3) $a_n = \sin n$;

4) $a_n = \frac{3^n}{4^n + 1}$;

5) $a_n = \frac{n+4}{n+3}$;

6) $a_n = \sqrt{n^2 + 1} - n$;

7) $a_n = \frac{2n+11}{n+4}$;

8) $a_n = \frac{n(1 + (-1)^n)}{2n+1}$.

6. Дослідіть числову функцію на періодичність:

- 1) $a_2 = -1$, $a_{n+2} = a_n$, $a_1 = 1$; 2) $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_{n+2} = \frac{1-a_n}{1+a_n}$;
3) $a_1 = 4$, $a_2 = 2$, $a_{n+1} = a_{n-1}$ для $n \geq 2$; 4) $a_1 = \frac{1}{2}$, $a_{n+1} = \frac{1}{2} + \sqrt{a_n - a_n^2}$.

7. За допомогою методу математичної індукції доведіть, що сума кубів трьох послідовних натуральних чисел ділиться на 9.

8. На скільки трикутників можна розбити n -кутник його діагоналями, що не перетинаються?

Рівень С

1. Запишіть формулу, що задає послідовність усіх натуральних чисел:

- 1) які є кубами непарних чисел;
2) які при діленні на 3 дають в остачі 1;
3) які діляться одночасно на 5 і на 6;
4) які кратні 3 і дають при діленні на 4 остачу 1;
5) які в сумі з одиницею діляться на 3;
6) десятковий запис яких, складається лише з одиниць.

2. Послідовність задано рекурентним способом. Доведіть, що n -й член послідовності може бути заданий формулою:

- 1) $a_1 = 3$, $a_{n+1} = 7a_n + 3$, формула $a_n = \frac{7^n - 1}{2}$;
2) $a_1 = 4$, $a_{n+1} = 2a_n - 3$, формула $a_n = 2^{n-1} + 3$;
3) $a_1 = 1$, $a_{n+1} = 2a_n + 1$, формула $a_n = 2^n - 1$;
4) $a_1 = \frac{1}{2}$, $a_{n+1} = \frac{1}{2-a_n}$, формула $a_n = \frac{n}{n+1}$.

3. Послідовність задано формулою n -го члена. Задайте її рекурентно:

- 1) $a_n = n$; 2) $a_n = n^2$; 3) $a_n = 2n - 3$; 4) $a_n = n^2$.

4. Знайдіть найбільший член послідовності, яку задано формулою:

- 1) $a_n = 12 - n^3$; 2) $a_n = -n^2 + 8n - 13$;
3) $a_n = \frac{n}{1+n^2}$; 4) $a_n = 17n - n^3$;
5) $a_n = -n^2 + 3n + 5$; 6) $a_n = \frac{20}{n^2 - 4n + 24}$;
7) $a_n = 3n^2 - n^3$; 8) $a_n = 5 - \left(n - \frac{3}{4}\right)^2$.

5. Знайдіть найменший член послідовності, яку задано формулою:

- 1) $a_n = n^3 - 10$; 2) $a_n = n^2 - 4n + 1$;
3) $a_n = 2 - \frac{3}{(n-2)^2 + 1}$; 4) $a_n = n^3 - 18n$;
5) $a_n = n^2 - 8n + 17$; 6) $a_n = -1 - \frac{2}{n^2 - 10n + 22}$;
7) $a_n = n^4 - 15n + 1$; 8) $a_n = n^2 - 16n + 79$.

6. Доведіть, що послідовність (a_n) необмежена:
- 1) $a_n = n$; 2) $a_n = n^3 - 8n$; 3) $a_n = (-1)^n n$; 4) $a_n = \sqrt{n}$;
 5) $a = n + \frac{5}{n}$; 6) $a_n = n^{(-1)^n}$; 7) $a_n = 5^n$; 8) $a_n = \frac{n^2 + 1}{n}$.
- 7*. Дано послідовність (a_n) : $a_1 = a$, $a_2 = b$, $a_{n+2} = 2a_{n+1} + 3a_n$. Чи існують такі додатні числа a і b , що послідовність (a_n) — періодична?
8. Обчисліть добуток: $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n - 1)$.

Рефлексія

- | | | | |
|-----|---|------------------------|----|
| 1. | Я знаю, що означає n -й член числової послідовності. | | |
| | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 2. | Я можу знайти заданий член послідовності за формулою. | | |
| | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 3. | Я вмію аналізувати послідовність за її властивостями. | | |
| | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 4. | Я можу самостійно складати прості задачі на числові послідовності. | | |
| | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 5. | Я розумію, що таке періодична числова послідовність. | | |
| | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 6. | Я вмію визначати період за формулою або записом членів послідовності. | | |
| | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 7. | Я розумію, де в реальному житті використовують числові послідовності. | | |
| | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 8. | Я можу самостійно розв'язувати типові задачі із послідовностями. | | |
| | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 9. | Я розумію свої помилки, допущені під час роботи з цією темою. | | |
| | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 10. | Після уроку я почуваюся впевненіше у темі «Числові послідовності». | | |
| | Так | Ще треба потренуватися | Ні |

Можливі теми проєктів

- Дослідження періодичних послідовностей, заданих рекурентно.
- Фрактали.
- Коливання в фізиці та періодичні послідовності (зв'язок із фізикою).

4. Мова, вірші та повторювані структури (зв'язок із літературою).
5. Періодичність у комп'ютерних алгоритмах (зв'язок із інформатикою).
6. Біоритми людини та періодичність (зв'язок із біологією).







