

Тема 4.

Числові послідовності.

Границі числових послідовностей

Урок 9. Рівняння, що містять знак модуля.

Повторення

РОБОЧИЙ АРКУШ

(моє ім'я)

I. Очікувані результати навчальних досягнень

На уроці ви навчитеся:

- 1) розкривати модуль у рівняннях виду $|x| = a$ та $|x - a| = b$;
- 2) визначати кількість розв'язків рівняння з модулем і умови їхнього існування;
- 3) розв'язувати рівняння з одним і кількома модулями;
- 4) перевіряти правильність отриманих розв'язків підстановкою;
- 5) використовувати знання про модуль для розв'язання практичних задач (похибка, відстань, зміни величин);
- 6) пояснювати алгоритм розв'язування рівнянь з модулем однокласникам/однокласницям.

II. Усно. Повторення

1. Знайдіть кінцеве положення точки $A(-3)$, якщо її перемістити вправо на 2 одиниці, вправо на 4 одиниці і вліво на 6 одиниць.

А	Б	В	Г	Д
$A(3)$	$A(0)$	$A(-9)$	$A(-3)$	інша відповідь

2. Яка відстань між точками $A(-2,5)$ і $B(3,5)$ на числовій прямій?

А	Б	В	Г	Д
3,5	-2,5	5	6	інша відповідь

3. Знайдіть значення виразу $-5a + 4 \cdot (2a - 4) - 20$, якщо $a = 20$.

А	Б	В	Г	Д
26	24	32	22	інша відповідь

4. Розв'яжіть рівняння $4x^2 - 2x(2x - 1) + 20 = 0$.

5. Доведіть, що значення виразів

$A = 5x^2 - x(4x - 2) - 3(x + 2) - x^2 + x - 6$ і $B = 7 - 3x(4 - 2x) - (5x^2 - x) - x^2 + 11x - 10$ не залежать від значень x . З'ясуйте, значення якого із даних виразів більше.

III. Модуль дійсного числа та основні властивості модуля

Означення. Модулем числа x називають таке число $|x|$, що

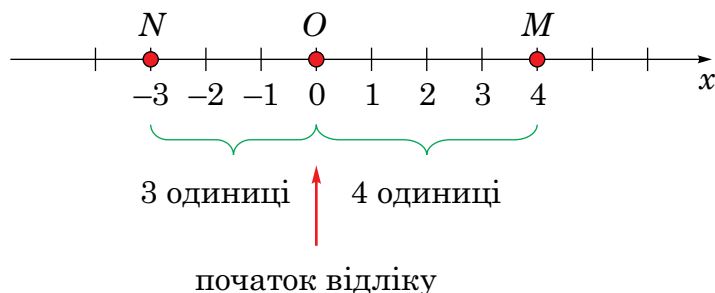
$$|x| = \begin{cases} x, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -x, & x < 0; \end{cases} = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

Наприклад, $|2| = 2$, $|0| = 0$, $|-3| = 3$, $|\sqrt{2} - 5| = 5 - \sqrt{2}$, $|\sin 100^\circ| = \sin 100^\circ$, $|\cos 130^\circ| = -\cos 130^\circ$.

Геометричний зміст модуля

Теорема. Модуль різниці двох чисел дорівнює відстані між точками, які зображають ці числа.

Розглянемо геометричну інтерпретацію (див. рисунок).



Точка N має на числовій прямій координату (-3) , тому відстань від N до O дорівнює $|-3|$, тобто $NO = |-3| = 3$.

Точка M має координату 4 , тому $OM = |4| = 4$.

Основні властивості модулів

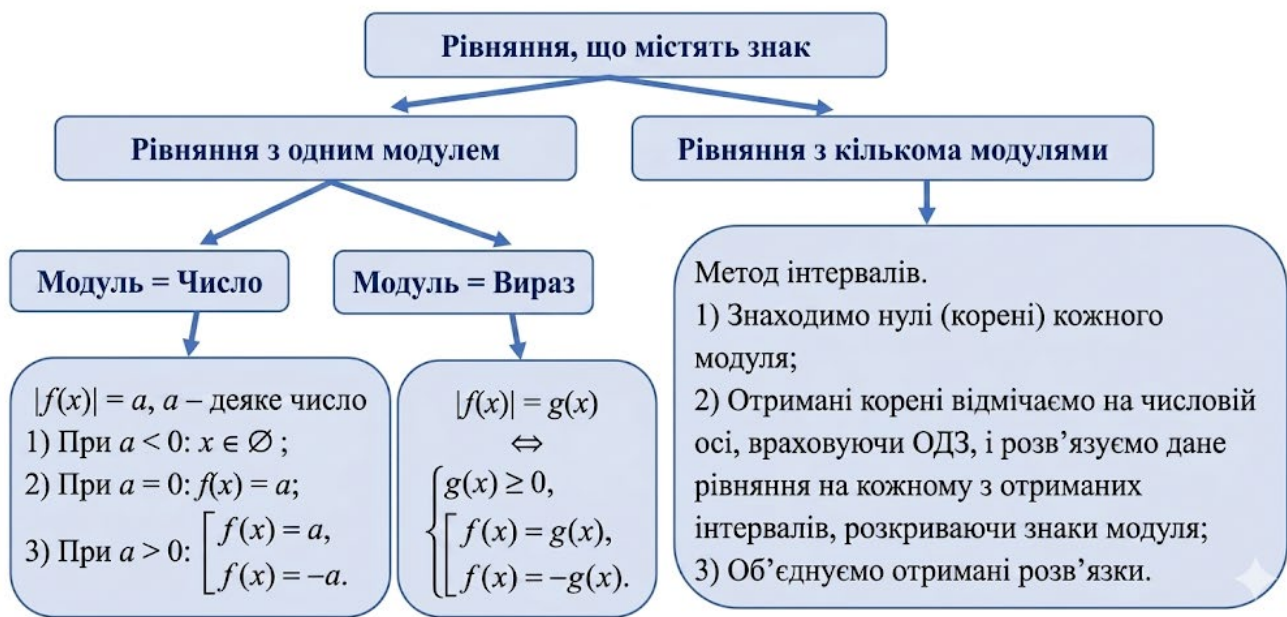
- 1) $|a| \geq 0$;
- 2) $|-a| = |a|$;
- 3) $|a - b| = |b - a|$;
- 4) $|ab| = |a| \cdot |b|$;
- 5) $|a^n| = |a|^n$;
- 6) $\left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|}$;
- 7) $|a + b| \leq |a| + |b|$;
- 8) $||a| - |b|| \leq |a - b|$.

Приклад 1. Знайдіть значення виразу $|3 - \sqrt{10}| + |\sqrt{10} - 3|$.

[illegible]

IV. Розв'язування рівнянь, які містять знак модуля

Рівняння, які містять знак модуля можна розв'язувати за наступною схемою.



Зауваження. При розв’язуванні рівнянь з модулем усередині іншого модуля потрібно розкривати знаки модулів послідовно або зсередини, або зовні. Доцільніше — зовні.

Зауваження. Розповсюдженням методом розв’язування рівнянь із модулем є введення нової змінної (змінних), у результаті якого дане рівняння зводиться до рівняння або системи рівнянь простішого виду.

«Вгадування» знаків підмодулевих виразів

Під час розв'язування окремих рівнянь з модулями зручно використовувати властивості модулів 1) – 9) (нехай $f(x) = f$, $g(x) = g$):

$$1) |f| = f \Leftrightarrow f \geq 0;$$

$$2) |f| = -f \Leftrightarrow f \leq 0;$$

$$3) |f| = |g| \Leftrightarrow \begin{cases} f = g, \\ f = -g; \end{cases}$$

$$4) |f| + |g| = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f = 0, \\ g = 0; \end{cases}$$

$$5) |f| + |g| = f + g \Leftrightarrow \begin{cases} f \geq 0, \\ g \geq 0; \end{cases}$$

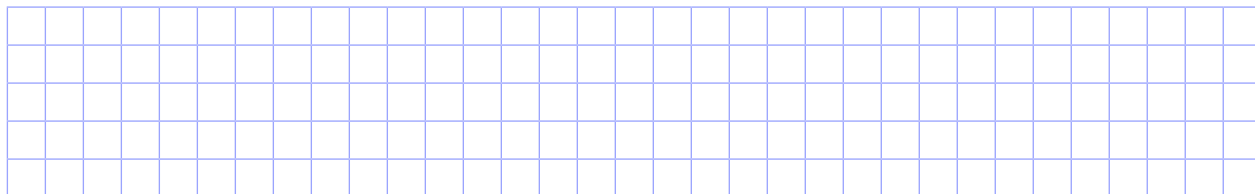
$$6) |f| + |g| = f - g \Leftrightarrow \begin{cases} f \geq 0, \\ g \leq 0; \end{cases}$$

$$7) |f| - |g| = f + g \Leftrightarrow \begin{cases} f \geq 0, \\ g \leq 0; \end{cases}$$

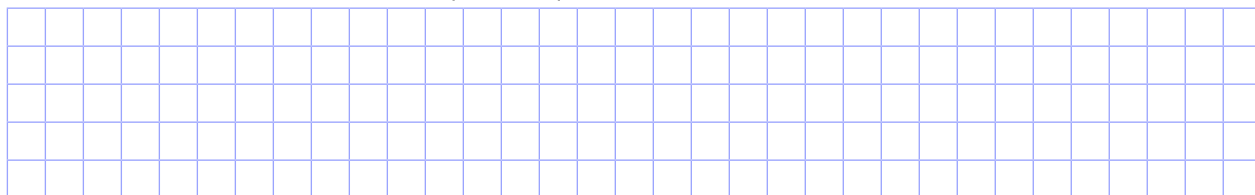
$$8) |f + g| = |f| + |g| \Leftrightarrow fg \geq 0;$$

$$9) |f - g| = |f| + |g| \Leftrightarrow fg \leq 0.$$

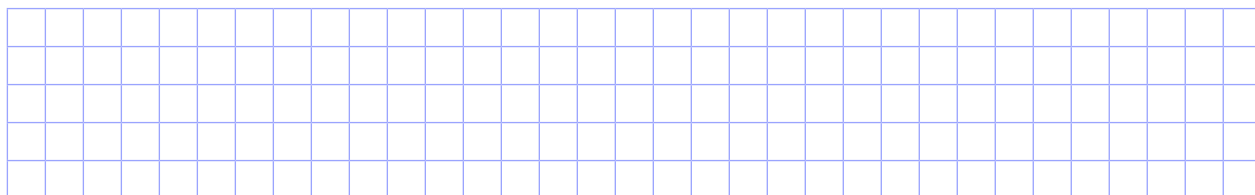
Приклад 2. Розв'яжіть рівняння $|x^2 + 5x + 6| = 2$.



Приклад 3. Розв'яжіть рівняння $|x^2 - 2x| = 3 - 2x$.



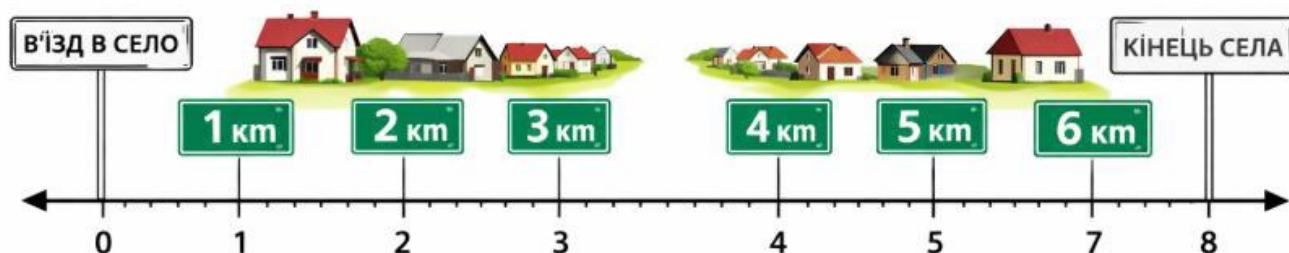
Приклад 4. Розв'яжіть рівняння $|x - 1| + |x - 2| = 4$.



V. Розв'язання практичної задачі

Як я вирішую певну проблему?

Задача. Після сильного буревію в селі перестав працювати мобільний зв'язок. Для відновлення зв'язку планують встановити тимчасову антену вздовж прямої дороги, що проходить через усе село. Вздовж цієї ж дороги розташовані будинки мешканців. Знайдіть таку точку x на дорозі, у якій слід встановити антену, щоб сума відстаней від цієї точки до всіх будинків була найменшою, якщо на мапі координат перший будинок розташований за 1 км від в'їзду в село, а останній — за 6 км (див. рисунок).



VI. Тренувальні вправи. Три рівні складності: А, В, С

Рівень А

1. Розкрийте модуль:

1) $\left|\frac{\pi}{3}-1\right|$; 2) $\left|2-\frac{\pi}{3}\right|$; 3) $\left|x-\frac{x^2}{4}-1\right|$; 4) $|x^2+2x+2|$.

2. Розв'яжіть рівняння:

1) $|4x-1|=11$; 2) $|2x+7|=-6$; 3) $|6x-12|=0$;
4) $|x^2+x|=0$; 5) $|x^2-4x|=5$; 6) $|x^2-5x+4|=4$.

3. Розв'яжіть рівняння:

1) $\left|\frac{4}{3-2x}\right|=3$; 2) $\left|\frac{x+1}{2x-1}\right|=1$; 3) $\left|\frac{2x+1}{x-1}\right|=1$.

4. Розв'яжіть рівняння:

1) $|2x-1|=|3x+2|$; 2) $|3-4x|=|2x+1|$.

5. Відомо, що $a+b < 0$, $a > 0$, $b < 0$. Порівняйте з нулем значення виразу $|a|-|b|$.

6. Розв'яжіть рівняння:

1) $||x|-2|=2$; 2) $||x|+2|=1$.

7. Розв'яжіть рівняння:

1) $|2x-3|=|1+2x|$; 2) $|x-2|=3|x+3|$; 3) $|x+1|-2|x-3|=0$;
4) $|x|=|5-2x|$; 5) $|x-3|=3|x+3|$; 6) $2|x+1|=|3-x|$.

8. Знайдіть суму коренів рівняння $|2x-7|=3$.

9. Знайдіть суму квадратів коренів рівняння $x^2-4|x|+1=0$.

10. Знайдіть суму раціональних коренів рівняння $|x^2-x-5|=1$.

11. Знайдіть найменший корінь рівняння $|3x^2+5x-9|=|6x+15|$.

12. Знайдіть кількість коренів рівняння $|x^2+x-3|=x$.

Рівень В

1. Спростіть вираз:

1) $(3|x|-|y|)(3|x|+|y|)$; 2) $(2|a|-3|b|)^2+(2|a|+3|b|)^2$; 3) $\frac{|m|-|n|}{|m|+|n|}-\frac{|m|+|n|}{|m|-|n|}$.

2. Розв'яжіть систему рівнянь
$$\begin{cases} |x+y-4|=\pi, \\ |x-3|+|y-1|=3. \end{cases}$$

3. Розв'яжіть рівняння:

1) $||x|-2|-1|-2|=2$; 2) $\left|\frac{1}{6}-\left|\frac{1}{6}-|x-1|\right|\right|=0,5$.

4. Розв'яжіть рівняння:

1) $|x^2+x+1|=|x^2+3x-1|$; 2) $|x^2+2x-3|=|6x-6|$;
3) $|x-x^2-1|=|2x-3-x^2|$; 4) $3|2x^2+4x+1|=|x^2+5x+3|$.

5. Розв'яжіть рівняння:

$$\begin{array}{lll} 1) |3x-1| = 2+x; & 2) 2|x+1| = x+4; & 3) |x^2+x-1| = 2x-1; \\ 4) |x^2+3x-4| = 3x; & 5) |x^2-x+3| = x+2; & 6) |x^2-4x+3| = 5-2x. \end{array}$$

6. Розв'яжіть рівняння:

$$\begin{array}{ll} 1) 6x - x^2 - 9 = |x-3|; & 2) x^2 - 3x + 2|x-2| = 0; \\ 3) |4x-1| = \frac{1}{3x-1}; & 4) \left| 2 + \frac{7}{x-3} \right| = \frac{7x+17}{5}. \end{array}$$

7. Розв'яжіть рівняння:

$$\begin{array}{lll} 1) x^2 - 3|x| = 0; & 2) x^2 + |x| - 2x = 0; & 3) x^2 - \frac{|x|}{x} = 0; \\ 4) x^2 - \frac{2x^2}{|x|} = 0; & 5) 2x^2 + 5|x| = 0; & 6) x^2 + \frac{4x^2}{|x|} = 0. \end{array}$$

8. Розв'яжіть рівняння:

$$\begin{array}{ll} 1) |x^2+7x-4| = 4; & 2) x^2 + 6|x| + 8 = 0; \\ 3) x^2 - 4|x| - 21 = 0; & 4) x|2x+1| - 3x - 4 = 0; \\ 5) 5x^2 - 8|x| + 3 = 0; & 6) x^2 - 8\sqrt{x^2} + 15 = 0; \\ 7) x^2 + \frac{4x^2}{|x|} - 12 = 0; & 8) |x^2 - 6x + 4| - 3 = 1. \end{array}$$

9. Розв'яжіть рівняння:

$$\begin{array}{ll} 1) |x^2-1| + |x^2+6x-7| = 0; & 2) |x^2+2x-3| + |x^2+7x+12| = 0; \\ 3) |x^2-3x-10| + |2x^2-9x-5| = 0; & 4) |x^3+x-2| + |x^2+4x-5| = 0. \end{array}$$

10. Розв'яжіть рівняння:

$$\begin{array}{ll} 1) |x+2| + |x-3| = 5; & 2) |x-3| + 2|x+1| = 4; \\ 3) |5-x| + |x-1| = 10; & 4) |x-2| - |5+x| = 3; \\ 5) |2x-1| - |2x-4| = 15-6x; & 6) |x| + |x-1| + |x-2| = 2. \end{array}$$

11. Знайдіть суму коренів рівняння: $|x-3| = -x^2 + 4x - 3$.

12. Знайдіть суму цілих коренів рівняння $|x^2+2x-3| = 3-2x-x^2$.

Рівень С

1. Побудуйте графік функції:

$$1) y = |x+3| + |x-1|; \quad 2) y = 2|x-2| - |x-1|.$$

2. Розв'яжіть рівняння:

$$\begin{array}{ll} 1) |12-8x+x^2| = x^2-8x+12; & 2) |x^2-8x+12| = 8x-12-x^2; \\ 3) \left| \frac{1+3x}{2x-4} \right| = \frac{1+3x}{4-2x}; & 4) \left| \frac{x^5}{1-x^2} \right| = \frac{x^5}{1-x^2}. \end{array}$$

3. Розв'яжіть рівняння:

$$1) x^2 - 2x - 5|x-1| + 5 = 0; \quad 2) x^2 + 2x + 2|x+1| = 7.$$

4. Розв'яжіть рівняння:

1) $|2x^2 - 3x + 4| = |3x - 2| + 2x^2 + 2$; 2) $|2x - x^2 - 6| + |x - 10| = x^2 - 3x + 16$;
3) $|5x - x^2 - 10| + |x - 21| = x^2 - 6x + 31$; 4) $|9x - x^2 - 22| + |3x - 54| = x^2 - 12x + 76$.

5. Чому дорівнює кількість цілих розв'язків рівняння, які не більші за 30:

1) $\left| \frac{x+3}{x} \right| + |x| = \left| \frac{x^2 + x + 3}{x} \right|$; 2) $\left| \frac{5-x}{x} \right| + |x^3| = \frac{x^4 - x + 5}{x}$?

6. Обчисліть найбільший корінь рівняння $\frac{4}{|x|+3} - \frac{5}{3-|x|} = \frac{1}{|x|-3} - 1$.

7. Знайдіть суму цілих коренів рівняння $\left| \frac{x^2-1}{x+7} \right| + \left| \frac{x+7}{x^2-1} \right| = 2,5$.

8. При яких значеннях параметра a множина коренів рівняння $|x-1| + |x-a| = 1-a$ містить три цілих числа?

9. При яких значеннях параметра a множина коренів рівняння $|x-3| + |x-a| = a-3$ містить одне парне число?

VII. Рефлексія (1–2 хв)

1) На уроці я дізнався/дізналася

.....

2) Мені найбільше запам'яталося

.....

3) Для мене було найцікавішим

.....

4) Для мене було найскладнішим

.....

5) Я припустився/припустилася помилки

.....

6) Я хочу повторити, аби краще зрозуміти

.....

7) Поради собі до наступного уроку

.....

Можливі теми проєктів

1. Дослідження графіків функцій зі знаком модуля.
2. Застосування модуля для опису швидкості, відстані або зміни величин у задачах на рух.







