

Моніторинг навчальних досягнень учнів/учениць

Урок 1–2. Систематизація та узагальнення знань учнів/учениць

РОБОЧИЙ АРКУШ

(моє ім'я)

I. Очікувані результати навчальних досягнень

На уроці ви:

- 1) повторите основний матеріал тем, вивчених упродовж семестра;
- 2) перевірте рівень власної підготовки через виконання тестових завдань;
- 3) визначите, які питання засвоєні добре, а які потребують додаткового опрацювання.

II. Захист індивідуальних (групових) проєктів

III. Співвідношення між тригонометричними функціями

1. Залежність між тригонометричними функціями одного кута

Таблиця формул для обчислення значень тригонометричних функцій кутів по заданому значенню однієї з них

	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$
$\sin \alpha$		$\pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}$	$\pm \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}}$	$\pm \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha}}$
$\cos \alpha$	$\pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$		$\pm \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}}$	$\pm \frac{\operatorname{ctg} \alpha}{\sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha}}$
$\operatorname{tg} \alpha$	$\pm \frac{\sin \alpha}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}}$	$\pm \frac{\sqrt{1 - \cos^2 \alpha}}{\cos \alpha}$		$\frac{1}{\operatorname{ctg} \alpha}$

$\operatorname{ctg} \alpha$	$\pm \frac{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}}{\sin \alpha}$	$\pm \frac{\cos \alpha}{\sqrt{1 - \cos^2 \alpha}}$	$\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$	
-----------------------------	--	--	--------------------------------------	--

Вивчати всі формули не обов'язково. Варто запам'ятати лише певні формули й правила.

1) Якщо дано синус або косинус кута, то, за основною тригонометричною тотожністю $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, можна знайти відповідно косинус або синус.

Якщо задана чверть, у якій лежить кут α , то варто врахувати знак тригонометричної функції, якого набуває шукана тригонометрична функція в цій чверті.

За означенням тангенса або котангенса, знаходимо їхні значення.

2) Якщо дано тангенс або котангенс, то для знаходження синуса або косинуса варто скористатися формулами $1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$ або $1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$.

Для знаходження котангенса або тангенса потрібно пам'ятати, що $\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1$.

Із означень тангенса або котангенса маємо:

$$\sin \alpha = \operatorname{tg} \alpha \cdot \cos \alpha \text{ та } \cos \alpha = \operatorname{ctg} \alpha \cdot \sin \alpha.$$

2. Тригонометричні тотожності додавання

$$1) \cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta.$$

$$2) \cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta.$$

$$3) \sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta.$$

$$4) \sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta.$$

$$5) \operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}.$$

$$6) \operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}.$$

$$7) \operatorname{ctg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta - 1}{\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta}.$$

$$8) \operatorname{ctg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta + 1}{\operatorname{ctg} \beta - \operatorname{ctg} \alpha}.$$

3. Тригонометричні тотожності подвійного аргументу

$$1) \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha.$$

$$2) \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha.$$

$$3) \cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1.$$

$$4) \cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha.$$

$$5) \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}.$$

4. Формули пониження степеня

$$1) \cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{2}.$$

$$2) \sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{2}.$$

$$3) \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}.$$

$$4) \operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{1 - \cos \alpha}.$$

5. Формули половинного аргументу

$$1) \cos \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}.$$

$$2) \sin \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}.$$

$$3) \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}}.$$

$$4) \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{1 - \cos \alpha}}.$$

$$5) \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha}.$$

$$6) \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha}.$$

6. Формули зведення

Повторити формули зведення можна за допомогою таблиці.

x	$\sin x$	$\cos x$	$\operatorname{tg} x$	$\operatorname{ctg} x$
$\pi + \alpha$	$-\sin \alpha$	$-\cos \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$
$\pi - \alpha$	$\sin \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$
$2\pi + \alpha$	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$
$2\pi - \alpha$	$-\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$
$\frac{\pi}{2} + \alpha$	$\cos \alpha$	$-\sin \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$
$\frac{\pi}{2} - \alpha$	$\cos \alpha$	$\sin \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$
$\frac{3\pi}{2} + \alpha$	$-\cos \alpha$	$\sin \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$
$\frac{3\pi}{2} - \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\sin \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$

Мнемонічне правило для формул зведення

1. У правій частині рівності ставлять такий знак, який має ліва частина, за умови, що $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

2. Якщо в лівій частині формули аргумент має вигляд $\frac{\pi}{2} \pm \alpha$ або $\frac{3\pi}{2} \pm \alpha$, то синус міняють на косинус, тангенс — на котангенс, і навпаки. Якщо аргумент має вигляд $\pi \pm \alpha$ або $2\pi \pm \alpha$, то зміни функції не відбувається.

Наприклад, $\sin\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = -\cos \alpha$.

Якщо $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, то кут $\frac{3\pi}{2} - \alpha$ — кут III чверті, в якій синус — від’ємний.

Оскільки кут вигляду $\frac{3\pi}{2} \pm \alpha$, то синус міняємо на косинус.

Звідки $\sin\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = -\cos \alpha$.

7. Формули перетворення суми й різниці тригонометричних функцій у добуток

$$1) \sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2}.$$

$$2) \sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha + \beta}{2}.$$

$$3) \cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2}.$$

$$4) \cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \sin \frac{\alpha - \beta}{2}.$$

$$5) \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos \alpha \cdot \cos \beta}.$$

$$6) \operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos \alpha \cdot \cos \beta}.$$

8. Формули перетворення добутку тригонометричних функцій у суму

$$1) \sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} (\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)).$$

$$2) \cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} (\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)).$$

$$3) \sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} (\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)).$$

9. Формули перетворення синуса й косинуса кута через тангенс половини цього кута.

$$1) \sin \alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}.$$

$$2) \cos \alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}.$$

$$3) \operatorname{tg} \alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}.$$

Поради учню/учениці при перетворенні тригонометричних виразів

1) При виконанні вправ замість α можуть бути інші вирази, але це не означає, що не можна використовувати вивчені формули.

Наприклад, $\cos^2(5\beta - 2) + \sin^2(5\beta - 2) = 1$ або $\operatorname{tg} \gamma = \frac{\sin \frac{\gamma}{2}}{\cos \frac{\gamma}{2}}$ тощо.

2) Пам'ятайте, що $1 - \sin^2 \alpha = \cos^2 \alpha$, $1 - \cos^2 \alpha = \sin^2 \alpha$, $\sin^2 \alpha - 1 = -\cos^2 \alpha$, $\cos^2 \alpha - 1 = -\sin^2 \alpha$.

3) Іноді корисно замість 1 записати $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha$.

4) Якщо вираз містить тангенси або котангенси, то подавайте їх у вигляді дробових виразів $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$, $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$.

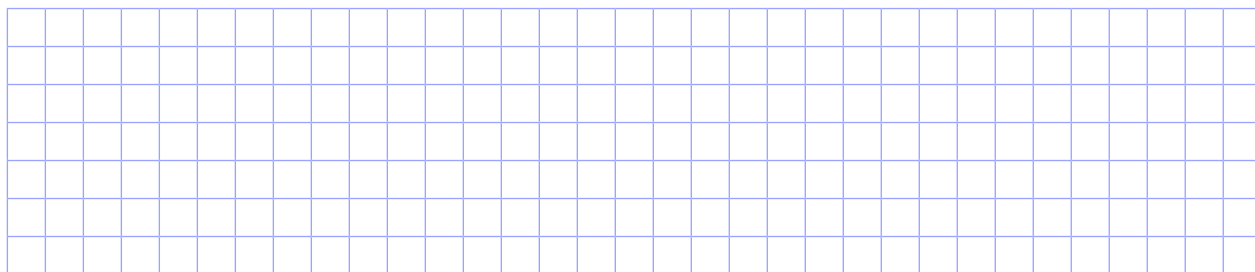
5) Використовуйте тотожності скороченого множення.

6) Якщо ви перетворюєте дробовий вираз, то розкладайте чисельник і знаменник на множники.

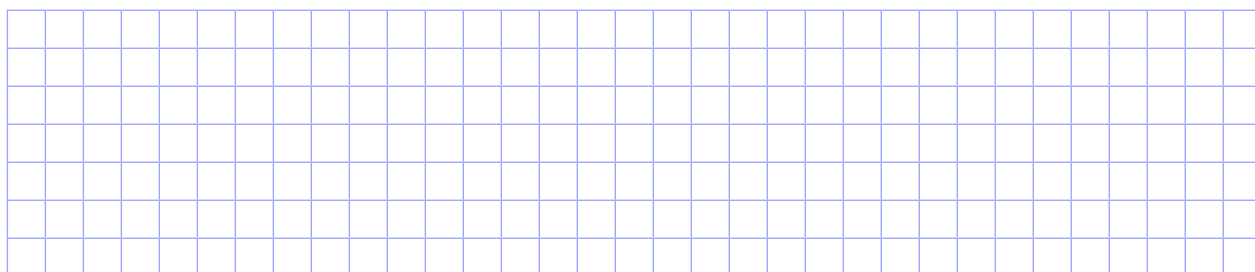
7) Якщо у виразі є декілька кутів, то використовуйте формули зведення, якщо це можливо.

8) Якщо у виразі є тригонометрична функція від суми чи різниці, то перетворюйте вираз за відповідними формулами.

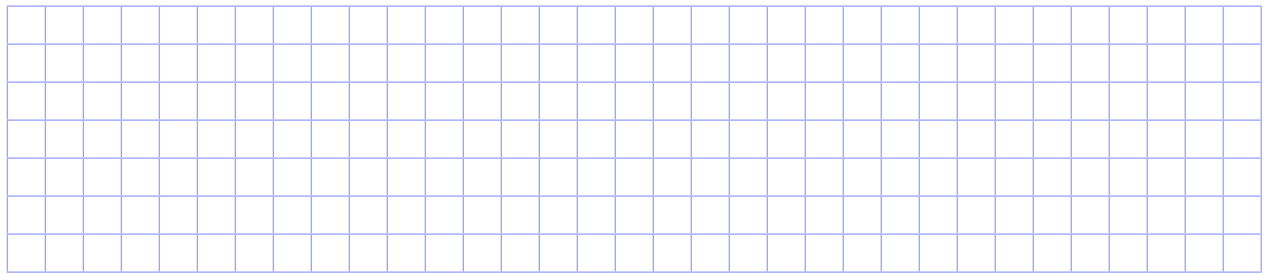
Приклад 1. Обчисліть $\frac{\sin \alpha}{\sin^3 \alpha + \cos^3 \alpha}$, якщо $\operatorname{tg} \alpha = 2$.



Приклад 2. Знайдіть $\alpha - \beta$, якщо $\sin \alpha = \frac{40}{41}$, $\sin \beta = -\frac{9}{41}$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, $-\frac{\pi}{2} < \beta < 0$.



Приклад 3. Відомо, що $\operatorname{ctg}(60^\circ - 2\alpha) + \operatorname{ctg}(30^\circ + 2\alpha) = a$. Знайдіть $\operatorname{ctg}^2(60^\circ - 2\alpha) + \operatorname{ctg}^2(30^\circ + 2\alpha)$.



IV. Тригонометричні рівняння

Розв'язування рівняння $\cos x = a$, якщо $a = 1$, $a = -1$, $a = 0$

Нагадаємо декілька фактів про функцію $y = \cos x$.

- 1) Функція $y = \cos x$ досягає свого найбільшого значення, яке дорівнює 1 у точках виду $2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. Тому $x = 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$ є коренями рівняння $\cos x = 1$.
- 2) Функція $y = \cos x$ досягає свого найменшого значення, яке дорівнює -1 у точках виду $\pi + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. Тому $x = \pi + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$ є коренями рівняння $\cos x = -1$.
- 3) Нулями функції $y = \cos x$ є числа виду $\frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. Тому $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$ є коренями рівняння $\cos x = 0$.

Узагальнимо дані у вигляді таблиці:

$\cos x = 1$	$x = 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$
$\cos x = -1$	$x = \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$
$\cos x = 0$	$x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$

Запишемо загальну формулу коренів рівняння $\cos x = a$, $|a| \leq 1$:

$$x = \pm \arccos a + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Означення. Арккосинусом числа a ($|a| \leq 1$) називають кут α ($0 \leq \alpha \leq \pi$), косинус якого дорівнює a , тобто $\cos \alpha = a$.

Основні властивості арккосинуса

- 1) Для $|a| \leq 1$ існує єдине значення арккосинуса.
- 2) Для $|a| > 1$ значень арккосинуса не існує, тобто вирази $\arccos 3$, $\arccos\left(-\frac{\pi}{3}\right)$, $\arccos \pi$, $\arccos(-4)$ не мають змісту.
- 3) Якщо $|a| \leq 1$, то $\cos(\arccos a) = a$.
- 4) $\arccos(-a) = \pi - \arccos a$.
- 5) $\arccos(\cos x) = x$ якщо $0 \leq x \leq \pi$.

Розв'язування рівняння $\sin x = a$, якщо $a = 1$, $a = -1$, $a = 0$

Нагадаємо декілька фактів про функцію $y = \sin x$.

1) Функція $y = \sin x$ досягає свого найбільшого значення, яке дорівнює 1 у точках виду $\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. Тому $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$ є коренями рівняння $\sin x = 1$.

2) Функція $y = \sin x$ досягає свого найменшого значення, яке дорівнює -1 у точках виду $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. Тому $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$ є коренями рівняння $\sin x = -1$.

3) Нулями функції $y = \sin x$ є числа виду πn , $n \in \mathbb{Z}$. Тому $x = \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$ є коренями рівняння $\sin x = 0$.

Узагальнимо дані у вигляді таблиці.

$\sin x = 1$	$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$
$\sin x = -1$	$x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$
$\sin x = 0$	$x = \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$

Загальна формула коренів рівняння $\sin x = a$, $|a| \leq 1$: $x = (-1)^k \arcsin a + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Означення. Арксинусом числа a ($|a| \leq 1$) називають кут α $\left(-\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}\right)$, синус якого дорівнює a , тобто $\sin \alpha = a$.

Основні властивості арксинуса

1) Для $|a| \leq 1$ існує єдине значення арксинуса.

2) Для $|a| > 1$ значень арксинуса не існує, тобто вирази $\arcsin \sqrt{2}$, $\arcsin\left(-\frac{\pi}{2}\right)$, $\arcsin 1,2$, $\arcsin(-4)$ не мають змісту.

3) Якщо $|a| \leq 1$, то $\sin(\arcsin a) = a$.

4) $\arcsin(\sin x) = x$, якщо $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$.

5) $\arcsin(-a) = -\arcsin a$.

Формула коренів рівняння $\operatorname{tg} x = a$

Множину коренів рівняння $\operatorname{tg} x = a$ можна записати у вигляді:

$$x = \operatorname{arctg} a + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Означення арктангенса числа a

Кут $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ має спеціальну назву — арктангенс.

Означення. Арктангенсом числа a називають такий кут α з проміжку $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, тангенс якого дорівнює a .

Основні властивості арктангенса

- 1) Для будь-якого числа a існує єдине значення арктангенса.
- 2) Для будь-якого числа a виконується рівність $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} a) = a$.
- 3) $\operatorname{arctg}(-a) = -\operatorname{arctg} a$.

Формула коренів рівняння $\operatorname{ctg} x = a$

Множину коренів рівняння $\operatorname{ctg} x = a$ можна записати у такому вигляді:

$$x = \operatorname{arctg} a + \pi n, n \in Z.$$

Означення арккотангенса числа a

Кут $\alpha \in (0; \pi)$ має спеціальну назву — арккотангенс.

Означення. Арккотангенсом числа a називають такий кут α з проміжку $(0; \pi)$, котангенс якого дорівнює a .

Основні властивості арккотангенса

- 1) Для будь-якого числа a існує єдине значення арккотангенса.
- 2) Для будь-якого числа a виконується рівність $\operatorname{ctg}(\operatorname{arccctg} a) = a$.
- 3) $\operatorname{arccctg}(-a) = \pi - \operatorname{arccctg} a$.

Приклад 4. Розв'яжіть рівняння $\cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{x}{3}\right) = 1$.

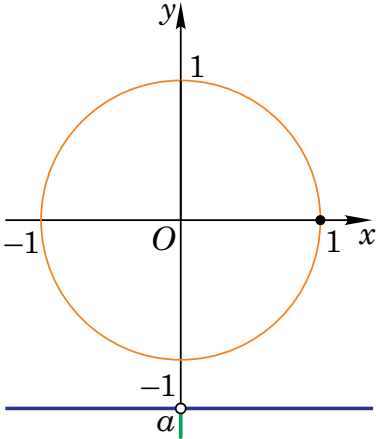
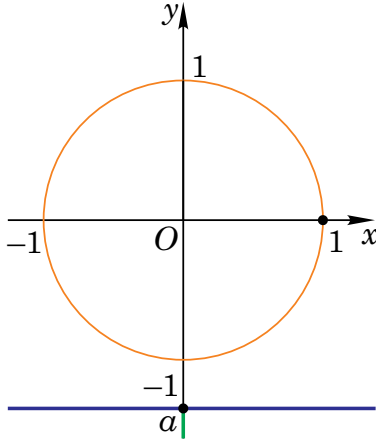
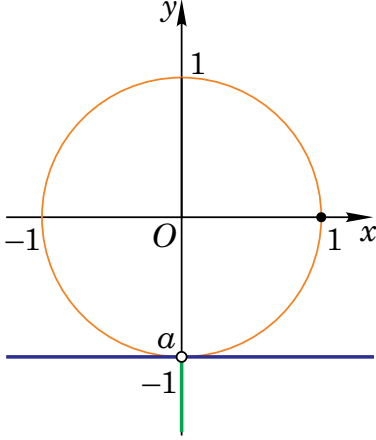
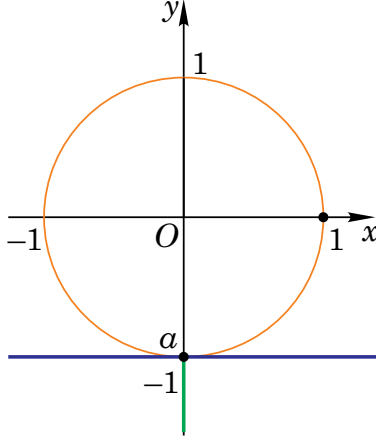
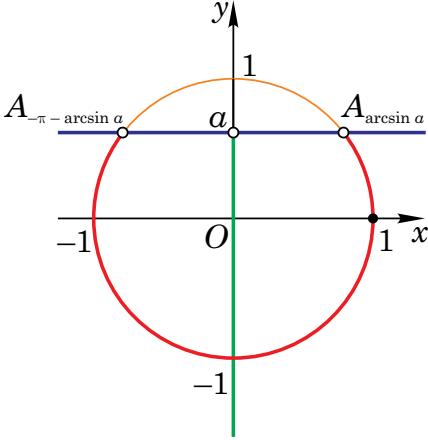
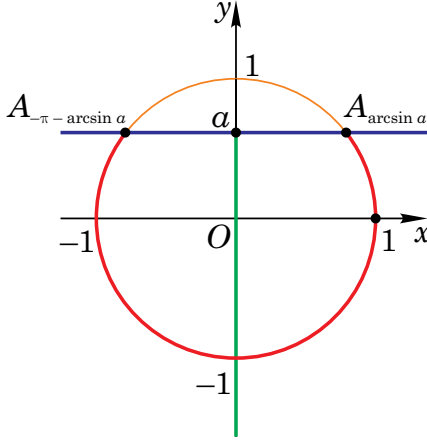
Приклад 5. Розв'яжіть рівняння $\sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = 1$.

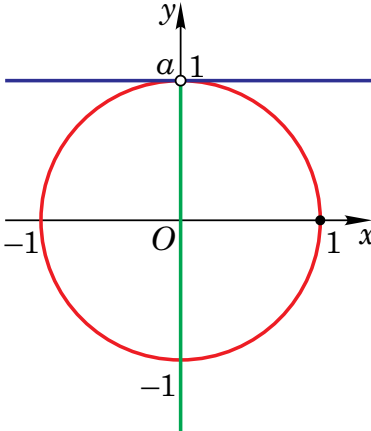
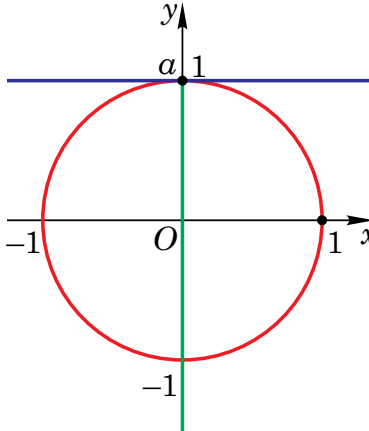
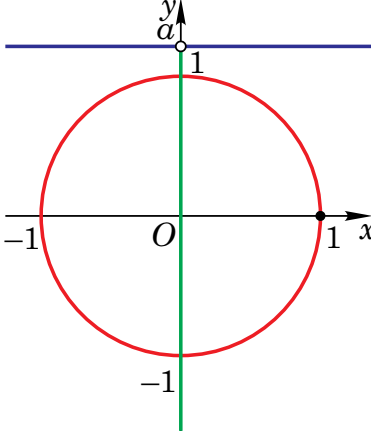
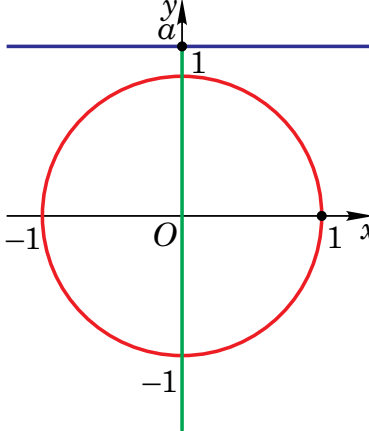
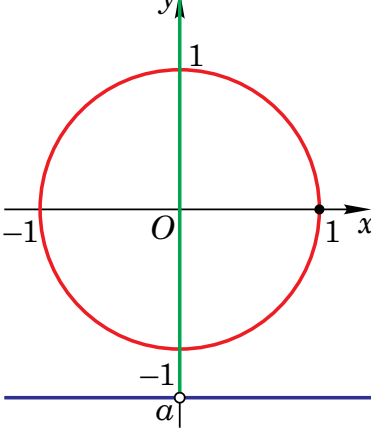
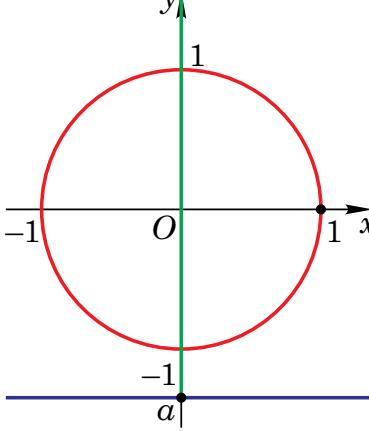
A large grid of graph paper, consisting of 20 columns and 10 rows of squares, intended for drawing a picture.

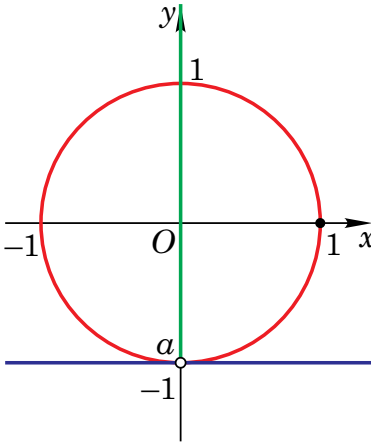
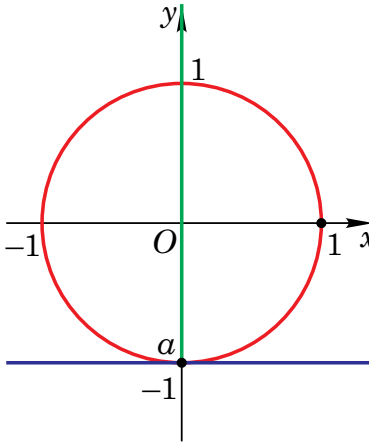
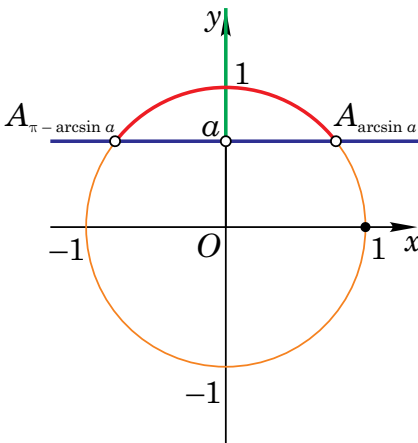
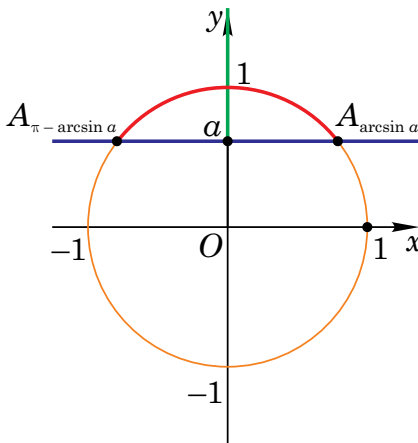
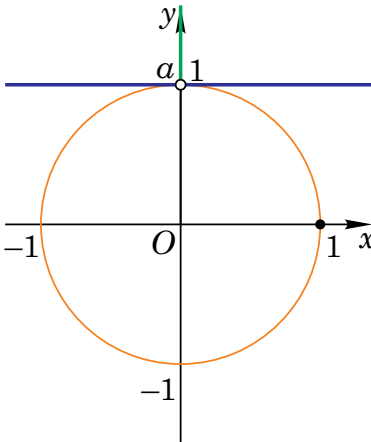
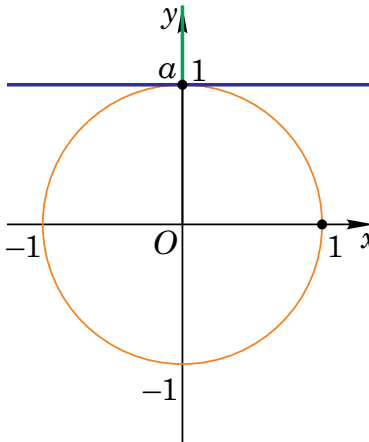
Приклад 6. Розв'яжіть рівняння $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{6}-\frac{x}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

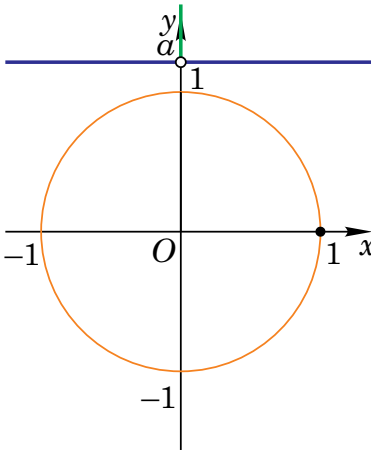
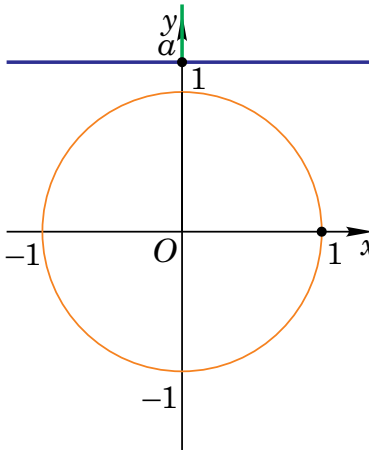
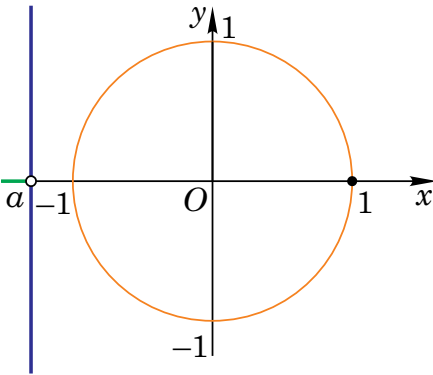
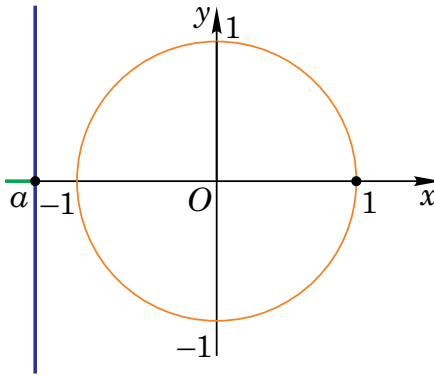
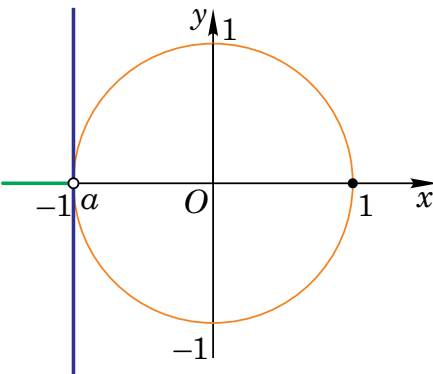
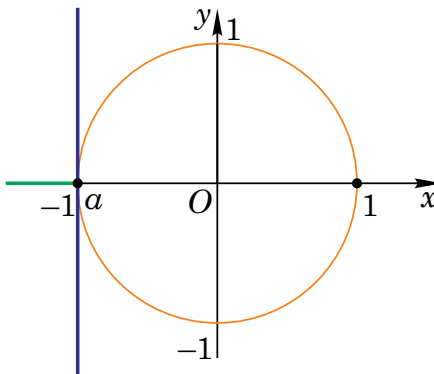
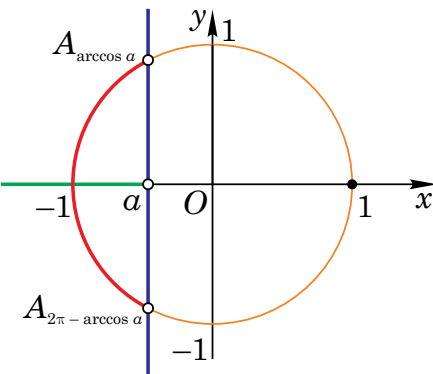
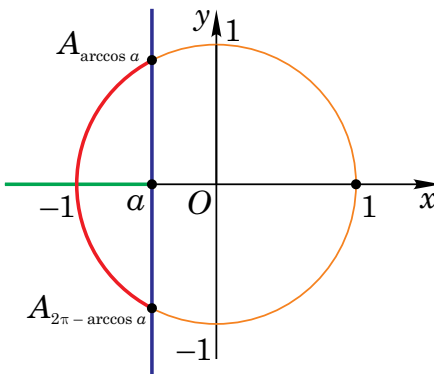
[illegible]

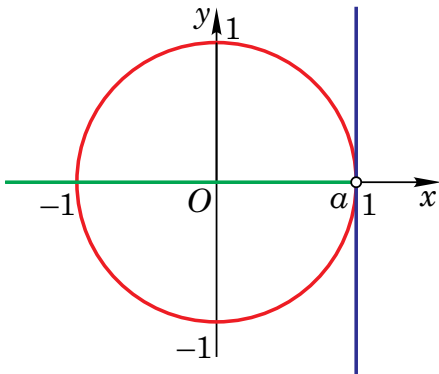
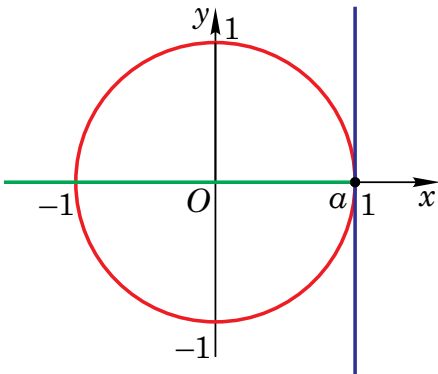
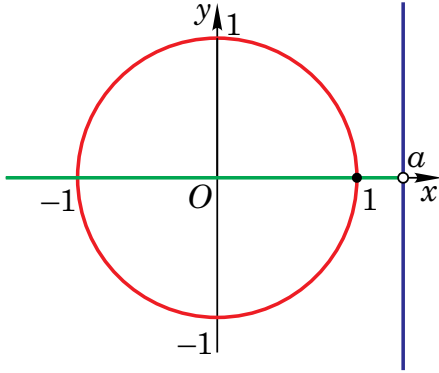
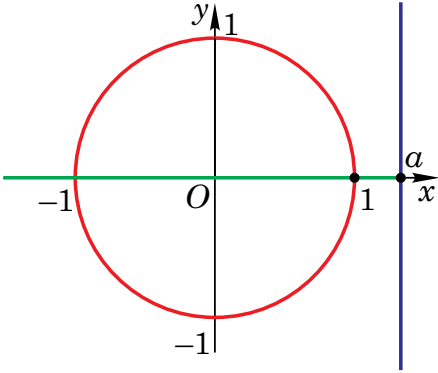
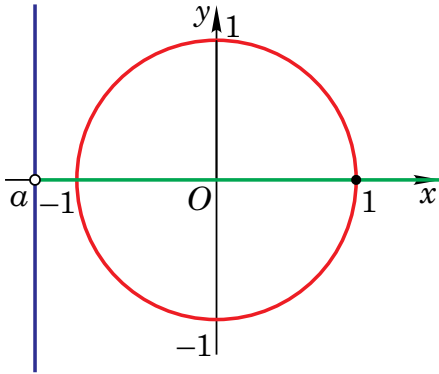
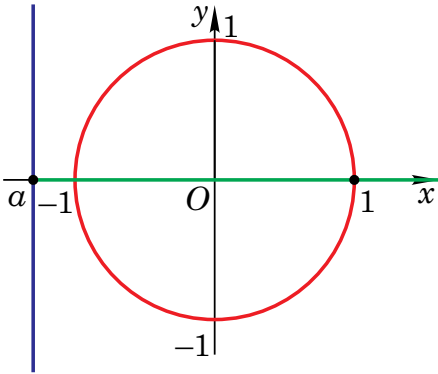
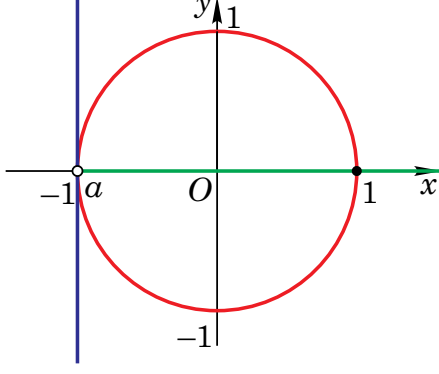
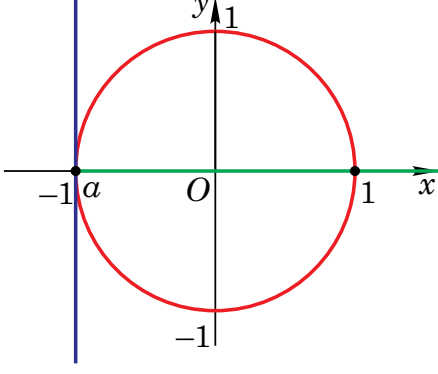
V. Тригонометричні нерівності

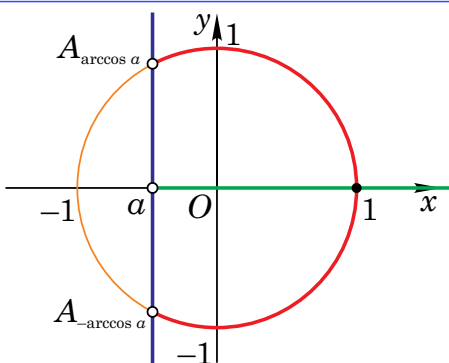
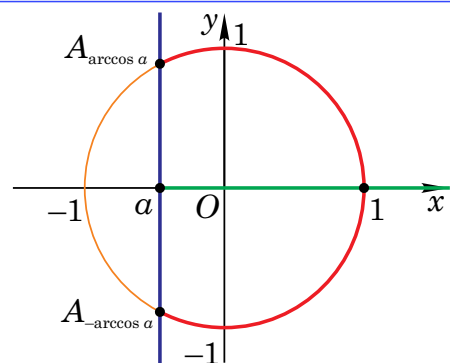
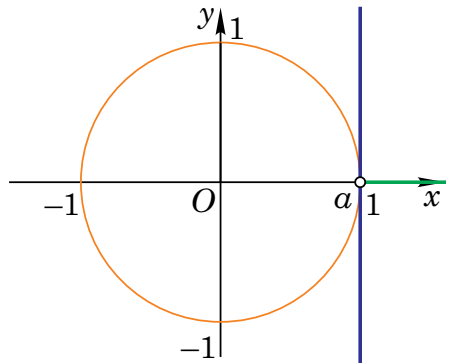
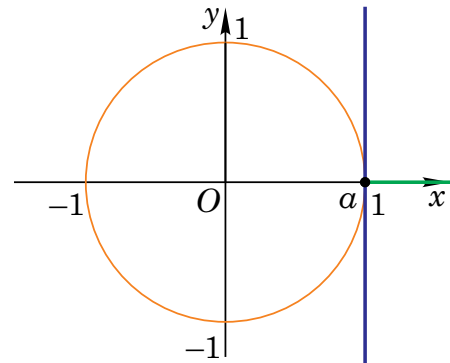
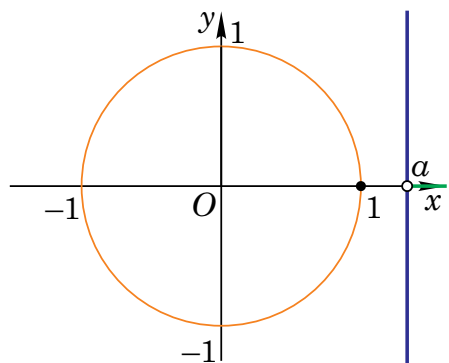
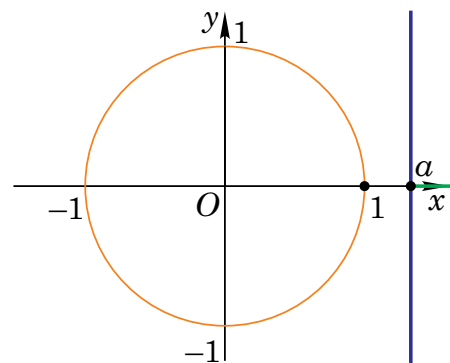
	Нерівність $\sin x < a$	Нерівність $\sin x \leq a$
$a < -1$	 Не має розв'язків	 Не має розв'язків
$a = -1$	 Не має розв'язків	 $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$
$-1 < a < 1$	 $-\pi - \arcsin a + 2\pi n < x < \arcsin a + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$	 $-\pi - \arcsin a + 2\pi n \leq x \leq \arcsin a + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$

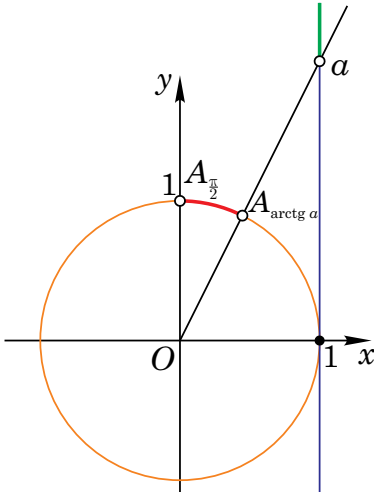
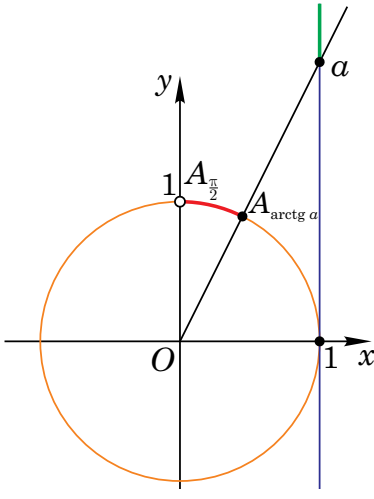
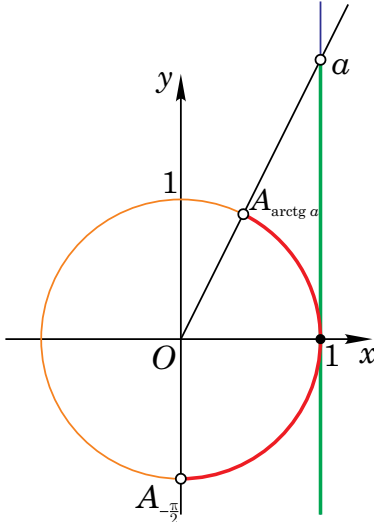
	Нерівність $\sin x < a$	Нерівність $\sin x \leq a$
$a = 1$	 $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + 2\pi n \right\}, n \in \mathbb{Z}$	 $x \in \mathbb{R}$
$a > 1$	 $x \in \mathbb{R}$	 $x \in \mathbb{R}$
	Нерівність $\sin x > a$	Нерівність $\sin x \geq a$
$a < -1$	 $x \in \mathbb{R}$	 $x \in \mathbb{R}$

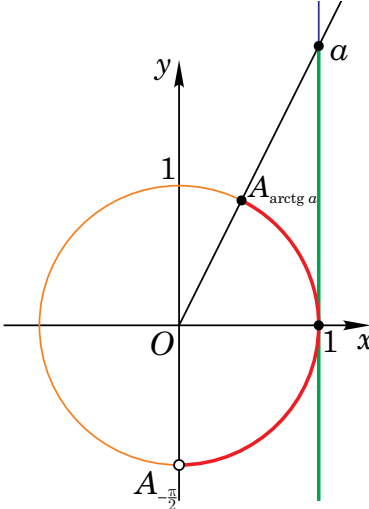
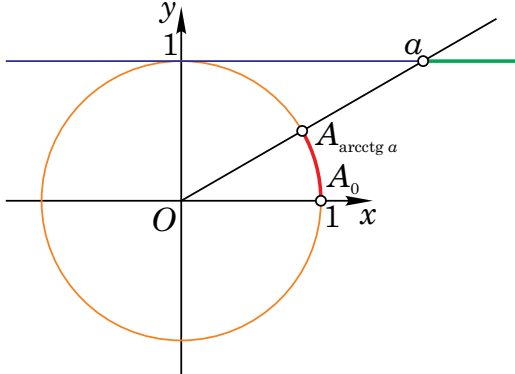
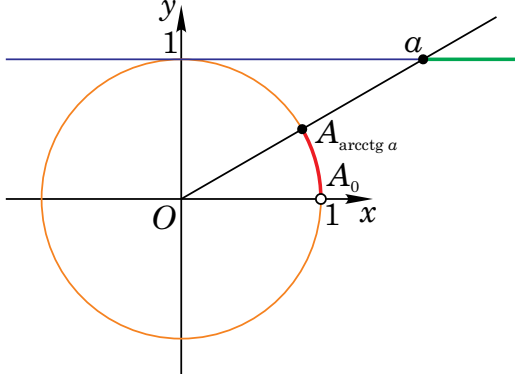
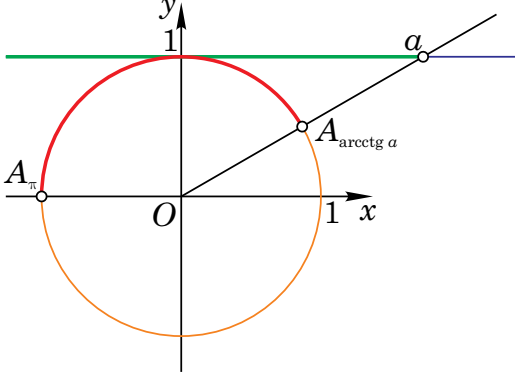
	Нерівність $\sin x > a$	Нерівність $\sin x \geq a$
$a = -1$	 $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{\pi}{2} + 2\pi n \right\}, n \in \mathbb{Z}$	 $x \in \mathbb{R}$
$-1 < a < 1$	 $\arcsin a + 2\pi n < x < \pi - \arcsin a + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$	 $\arcsin a + 2\pi n \leq x \leq \pi - \arcsin a + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$
$a = 1$	 Не має розв'язків	 $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$

	Нерівність $\sin x > a$	Нерівність $\sin x \geq a$
$a > 1$	 Не має розв'язків	 Не має розв'язків
	Нерівність $\cos x < a$	Нерівність $\cos x \leq a$
$a < -1$	 Не має розв'язків	 Не має розв'язків
$a = -1$	 Не має розв'язків	 $x = \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$
$-1 < a < 1$	 $\arccos a + 2\pi n < x < 2\pi - \arccos a + 2\pi n$ $n \in \mathbb{Z}$	 $\arccos a + 2\pi n \leq x \leq 2\pi - \arccos a + 2\pi n,$ $n \in \mathbb{Z}$

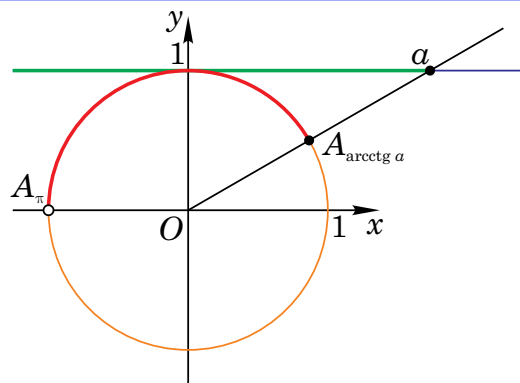
	Нерівність $\cos x < a$	Нерівність $\cos x \leq a$
$a = 1$	 $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\pi n\}, n \in \mathbb{Z}$	 $x \in \mathbb{R}$
$a > 1$	 $x \in \mathbb{R}$	 $x \in \mathbb{R}$
	Нерівність $\cos x > a$	Нерівність $\cos x \geq a$
$a < -1$	 $x \in \mathbb{R}$	 $x \in \mathbb{R}$
$a = -1$	 $x \in \mathbb{R} \setminus \{\pi + 2\pi n\}, n \in \mathbb{Z}$	 $x \in \mathbb{R}$

	Нерівність $\cos x > a$	Нерівність $\cos x \geq a$
$-1 < a < 1$	 $-\arccos a + 2\pi n < x < \arccos a + 2\pi n,$ $n \in \mathbb{Z}$	 $-\arccos a + 2\pi n \leq x \leq \arccos a + 2\pi n,$ $n \in \mathbb{Z}$
$a = 1$	 Не має розв'язків	 $x = 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$
$a > 1$	 Не має розв'язків	 Не має розв'язків

Нерівність $\operatorname{tg} x > a$	 $\operatorname{arctg} x + \pi n < x < \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$
Нерівність $\operatorname{tg} x \geq a$	 $\operatorname{arctg} x + \pi n \leq x < \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$
Нерівність $\operatorname{tg} x < a$	 $-\frac{\pi}{2} + \pi n < x < \operatorname{arctg} x + \pi n, n \in \mathbb{Z}$

Нерівність $\operatorname{tg} x \leq a$	 $-\frac{\pi}{2} + \pi n < x \leq \operatorname{arctg} a + \pi n, n \in \mathbb{Z}$
Нерівність $\operatorname{ctg} x > a$	 $\pi n < x < \operatorname{arctg} a + \pi n, n \in \mathbb{Z}$
Нерівність $\operatorname{ctg} x \geq a$	 $\pi n < x \leq \operatorname{arctg} a + \pi n, n \in \mathbb{Z}$
Нерівність $\operatorname{ctg} x < a$	 $\operatorname{arctg} a + \pi n < x < \pi + \pi n, n \in \mathbb{Z}$

Нерівність
 $\operatorname{ctg} x \leq a$

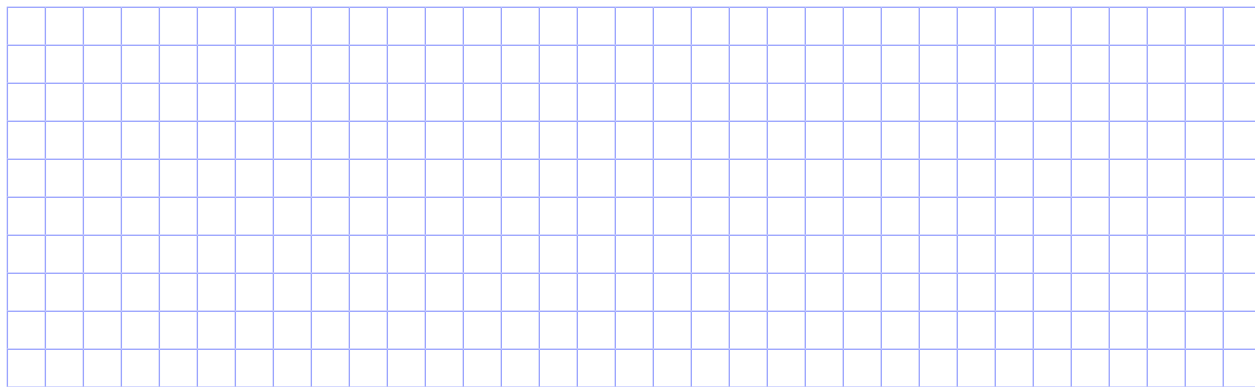


$$\operatorname{arctg} a + \pi n \leq x < \pi + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

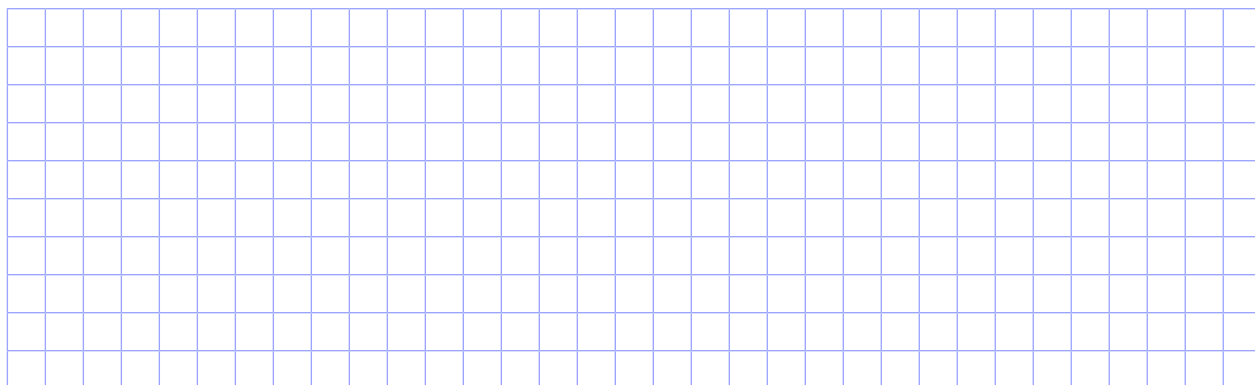
Приклад 7. Розв'яжіть нерівність $2\cos 3x \geq \sqrt{3}$.



Приклад 8. Розв'яжіть нерівність $\sin 2x \geq \frac{1}{2}$.



Приклад 9. Розв'яжіть нерівність $\operatorname{ctg}\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \leq -\frac{1}{\sqrt{3}}$.



VI. Числові послідовності. Границі числових послідовностей

Арифметична прогресія

Рекурентна формула	$a_1 = a, a_{n+1} = a_n + d, n \in \mathbb{N}.$
Формула n -го члена	$a_n = a_1 + d(n-1), n \in \mathbb{N}.$ $a_n = a_k + d(n-k), n \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{N}, n > k.$
Формули суми n перших членів	$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n, n \in \mathbb{N}.$ $S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n, n \in \mathbb{N}.$
Властивості	$a_n = \frac{a_{n+1} + a_{n-1}}{2}, n \in \mathbb{N}, n > 1.$ $a_n = \frac{a_{n+k} + a_{n-k}}{2}, n \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{N}, n > k.$ $a_m + a_n = a_k + a_p, m \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{N}, p \in \mathbb{N}, m + n = k + p.$

Геометрична прогресія

Рекурентна формула	$b_1 = b, b_{n+1} = b_n q, n \in \mathbb{N}.$
Формула n -го члена	$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}, n \in \mathbb{N}.$ $b_n = b_k \cdot q^{n-k}, n \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{N}, n > k.$
Формула суми n перших членів	$S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1}, n \in \mathbb{N}, q \neq 1.$
Властивості	$b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}, n \in \mathbb{N}, n > 1.$ $b_n^2 = b_{n-k} \cdot b_{n+k}, n \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{N}, n > k.$ $b_m \cdot b_n = b_k \cdot b_p, m \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{N}, p \in \mathbb{N}, m + n = k + p.$

Означення. Послідовність, яка має границю, називають **збіжною**. Послідовність, яка не має границі, називають **розбіжною**.

Границя суми. Якщо послідовності a_n і b_n є збіжними, то послідовність $(a_n + b_n)$ також є збіжною, причому $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$.

Границя добутку. Якщо послідовності a_n і b_n є збіжними, то послідовність $(a_n b_n)$ також є збіжною, причому $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$.

Наслідок. Зауважимо, що $\lim_{n \rightarrow \infty} (c a_n) = c \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$, де c — константа, а a_n — збіжна послідовність. Тобто константу можна виносити за знак границі.

Границя частки. Якщо послідовності a_n і b_n є збіжними, причому $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n \neq 0$,

$b_n \neq 0$, то послідовність $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ також є збіжною і $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n}$.

Друга чудова граница: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$

Приклад 10. Сума n перших членів геометричної прогресії обчислюється за формулою $S_n = 4(3^n - 1)$. Знайдіть знаменник геометричної прогресії.

A full-page sheet of graph paper featuring a uniform grid of small squares. The grid consists of 20 columns and 15 rows, creating a total of 300 square units. The lines are thin and light blue, set against a white background. There are no margins, text, or other markings on the page.

Приклад 11. Знайдіть $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + n + 1}{3n^2 - 14n - 2}$.

[illegible]

Приклад 12. Знайдіть: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$.

[illegible]

VII. Самостійна робота

Вариант 1

- 1.** Обчисліть $\frac{\sin \alpha - \cos \alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha}$, якщо $\operatorname{tg} \alpha = 3$.

А	Б	В	Г	Д
1	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	2

[illegible]

- 2.** Розв'яжіть рівняння $2 \cos 2x = -\sqrt{2}$.

А не має коренів

$$\text{Б } x = \pm \frac{3\pi}{8} + \pi n, n \in Z$$

B $x = \pm \frac{\pi}{8} + \pi n, n \in Z$

$$\Gamma \quad x = \pm \frac{3\pi}{4} + 2\pi n, n \in Z$$

$$\text{Д } x = \pm \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z$$

[illegible]

- 3.** Розв'яжіть нерівність $\sqrt{3} \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{6}\right) > 1$.

$$\mathbf{A} \left(\frac{\pi}{4} + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n \right), n \in \mathbb{Z}$$

$$\mathbf{B} \left(\frac{\pi}{3} + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n \right), n \in \mathbb{Z}$$

$$\mathbf{B}\left(\frac{\pi}{6}+\pi n; \frac{\pi}{2}+\pi n\right), n \in Z$$

$$\Gamma\left(-\frac{\pi}{2}+\pi n; \frac{\pi}{6}+\pi n\right), n \in Z$$

$$D\left(\pi n; \frac{\pi}{3} + \pi n\right), n \in Z$$

[illegible]

4. В арифметичній прогресії тридцять членів. Знайдіть суму всіх членів прогресії, якщо перший її член дорівнює -12 , а останній становить 75 .

А	Б	В	Г	Д
1305	945	2610	835	1890

[illegible]

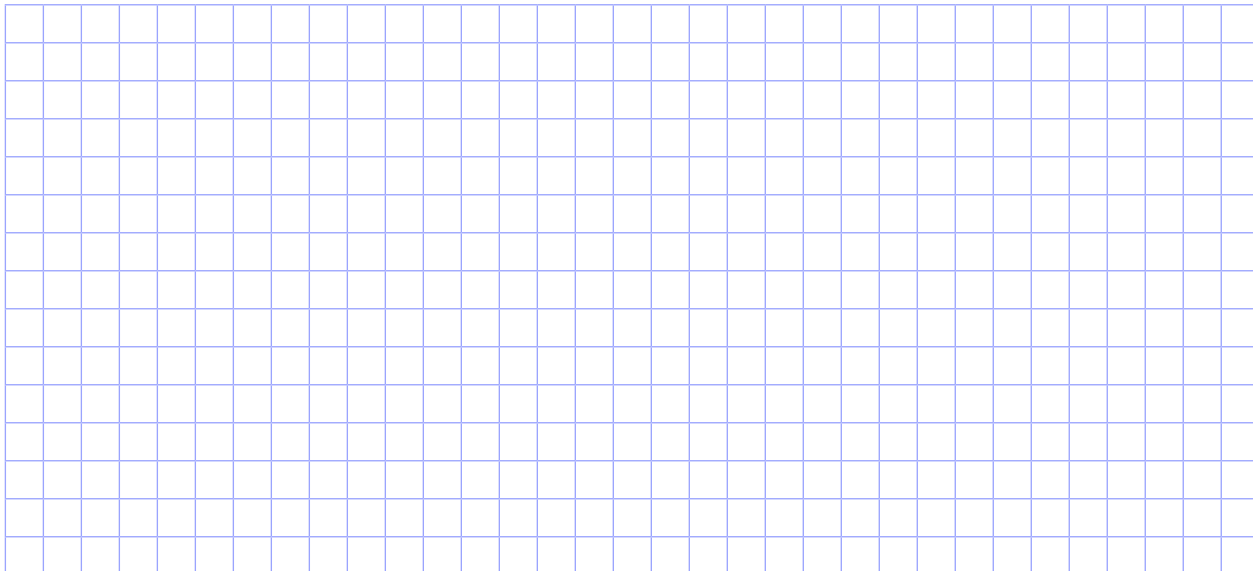
- 5.** Установіть відповідність між виразом (1–4) та виразом, який йому тотожно дорівнює (А–Д).

<i>Выраз</i>	<i>Тот же самый выражение</i>	
1 $\sin \alpha \cos \alpha$	A $\frac{1}{2} \sin 2\alpha$	1 ☐ ☐ ☐ ☐ ☐
2 $1 - 2 \sin^2 \alpha$	B $-\cos 2\alpha$	2 ☐ ☐ ☐ ☐ ☐
3 $\cos \left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha \right)$	B $\cos 2\alpha$	3 ☐ ☐ ☐ ☐ ☐
4 $\cos(\pi - 2\alpha)$	Г $2 \cos \alpha$	4 ☐ ☐ ☐ ☐ ☐
	Д $\sin 2\alpha$	

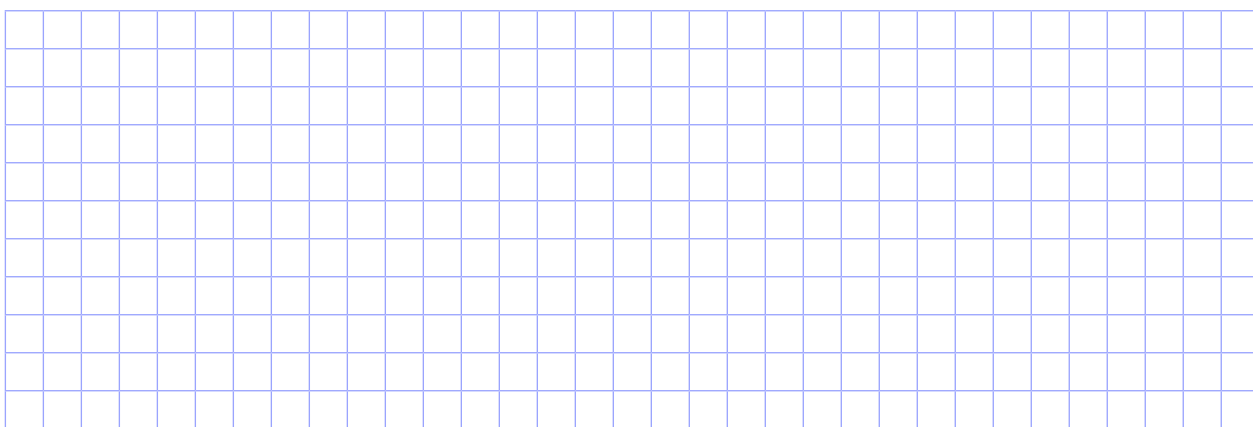
A full-page sheet of graph paper featuring a uniform grid of small squares. The grid consists of 20 columns and 20 rows, creating a total of 400 squares. The lines are thin and light blue, set against a white background. There are no margins, text, or other markings on the page.

- 6.** Установіть відповідність між рівнянням (1–4) та множиною його розв’язків (А – Д) на проміжку $[0; 2\pi]$.

<i>Рівняння</i>	<i>Множина розв'язків</i>	<i>А</i>	<i>Б</i>	<i>В</i>	<i>Г</i>	<i>Д</i>
1 $\sin 2x = 0$	А $\{0; 2\pi\}$	1	☐	☐	☐	☐
2 $2\cos x = 2$	Б $\left\{0; \frac{\pi}{2}; \pi; \frac{3\pi}{2}; 2\pi\right\}$	2	☐	☐	☐	☐
3 $\cos 2x = 0$	В $\left\{0; \frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{4}; \pi\right\}$	3	☐	☐	☐	☐
4 $\operatorname{tg} \frac{1}{2}x = 1$	Г $\left\{\frac{\pi}{2}\right\}$	4	☐	☐	☐	☐
	Д $\left\{\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}; \frac{7\pi}{4}\right\}$					

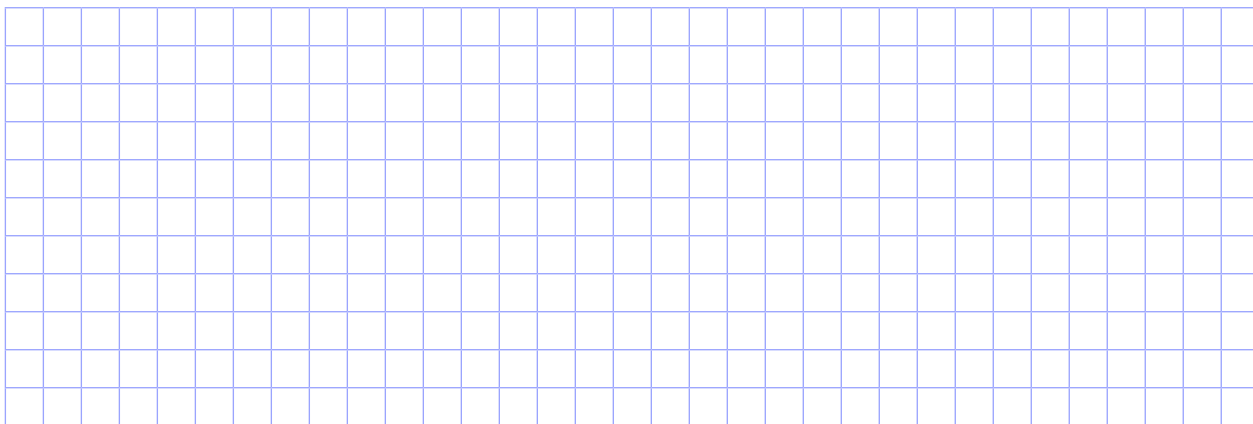


7. Обчисліть: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n + 3^n}{2^{n+1} + 3^{n+1}}$.



Відповідь.

8. Знайдіть суму S усіх трицифрових натуральних чисел, які діляться на число 7 без остачі. У відповідь запишіть $\frac{S}{100}$.



Відповідь.

Варіант 2

- 1.** Знайдіть значення виразу $3\sin^2\alpha - 7\cos^2\alpha$, якщо $\cos\alpha = -0,1$.

А	Б	В	Г	Д
2	2,9	3,1	3,96	2,92

[illegible]

- 2.** Розв'яжіть рівняння $\sqrt{3} \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = 1$.

A $x = \pi n, n \in Z$

$$\text{B } x = \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in Z$$

B $x = -\frac{\pi}{3} + \pi n, n \in Z$

$$\Gamma \quad x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Д } x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z$$

[illegible]

- 3.** Розв'яжіть нерівність $2\sin 2x > \sqrt{2}$.

$$\mathbf{A} \left(-\frac{\pi}{8} + \pi k; \frac{3\pi}{8} + \pi k \right), k \in \mathbb{Z}$$

$$\mathbf{B} \left(-\frac{\pi}{4} + \pi k; \frac{3\pi}{4} + \pi k \right), k \in \mathbb{Z}$$

$$\mathbf{B} \left(-\frac{\pi}{4} + 2\pi k; \frac{3\pi}{4} + 2\pi k \right), k \in \mathbb{Z}$$

$$\Gamma\left(-\frac{\pi}{8}+2\pi k; \frac{5\pi}{8}+2\pi k\right), k \in Z$$

$$\mathbb{D}\left(-\frac{\pi}{8}+\pi k; \frac{5\pi}{8}+\pi k\right), k \in \mathbb{Z}$$

[illegible]

4. Запишіть формулу для обчислення суми n перших членів геометричної прогресії
2; 6; 18 ...

А	Б	В	Г	Д
$2n$	$3^{n+1} - 7$	$3n - 1$	$2^n + 1$	$3^n - 1$

[illegible]

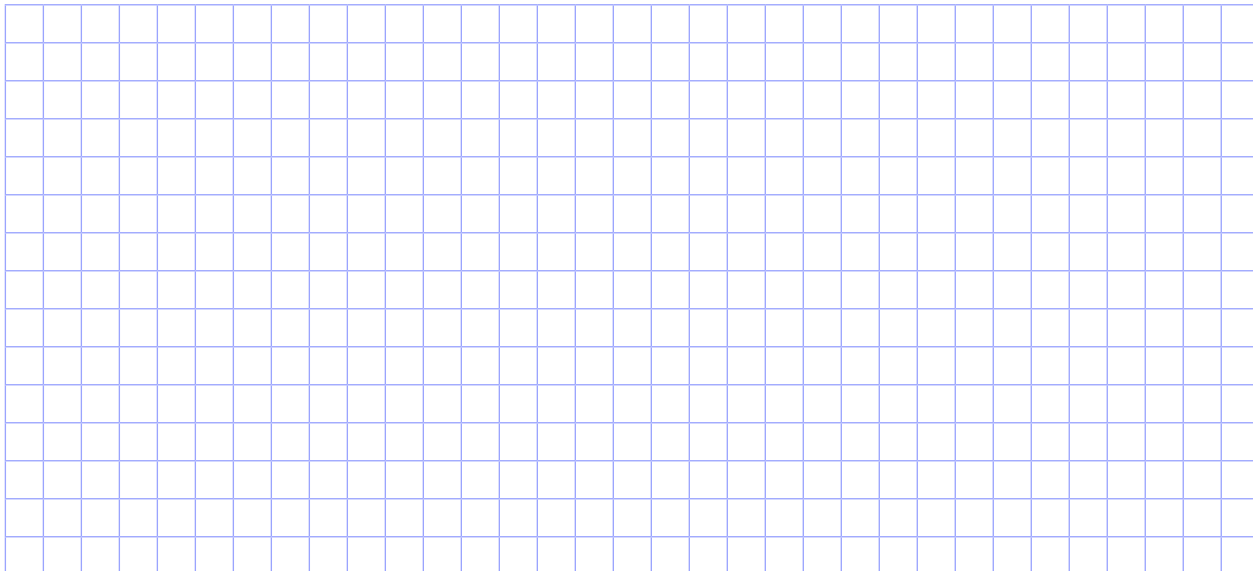
- 5.** $\sin \beta = a$, де β — кут I четверті. Установіть відповідність між тригонометричним виразом (1–4) та його значенням (А–Д).

Тригонометричний вираз	Значення виразу	А	Б	В	Г	Д
1 $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \beta\right)$	А a	☐	☐	☐	☐	☐
2 $\sin(\pi - \beta)$	Б $-a$	☐	☐	☐	☐	☐
3 $\sin(\pi + \beta)$	В $\frac{1}{a}$	☐	☐	☐	☐	☐
4 $\sin\left(\frac{3\pi}{2} - \beta\right)$	Г $-\sqrt{1 - a^2}$	☐	☐	☐	☐	☐
	Д $\sqrt{1 - a^2}$	☐	☐	☐	☐	☐

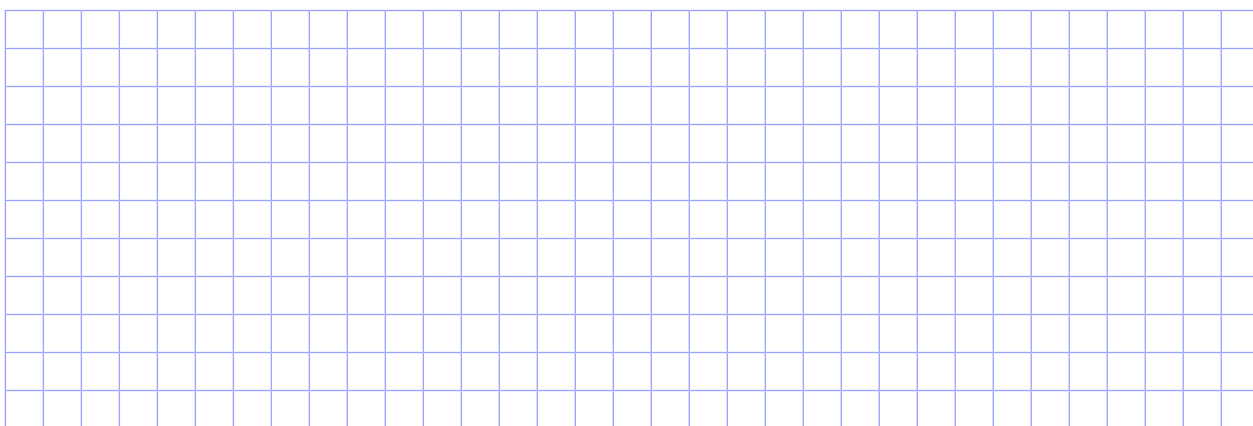
This image shows a full page of blank graph paper. The background is a solid light gray color. Overlaid on this background is a precise grid of thin, light blue horizontal and vertical lines. These lines intersect to form a series of small, identical squares that cover the entire area of the page, leaving no margins or other markings.

- 6.** Установіть відповідність між рівнянням (1–4) та множиною його розв’язків (А—Д).

<i>Рівняння</i>	<i>Множина розв'язків рівняння</i>	А Б В Г Д
1 $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = a, a \leq 1$	А $\pm \arccos a + 2\pi n, n \in Z$	1 ☐ ☐ ☐ ☐ ☐
2 $\sin x \cos x = \frac{a}{2}$	Б $\arctg a + \pi n, n \in Z$	2 ☐ ☐ ☐ ☐ ☐
3 $\sin x = a \cos x$	В $\operatorname{arccotg} a + \pi n, n \in Z$	3 ☐ ☐ ☐ ☐ ☐
4 $\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = a$	Г $(-1)^n \arcsin a + \pi n, n \in Z$	4 ☐ ☐ ☐ ☐ ☐
	Д $(-1)^n \frac{1}{2} \arcsin a + \frac{\pi n}{2}, n \in Z$	

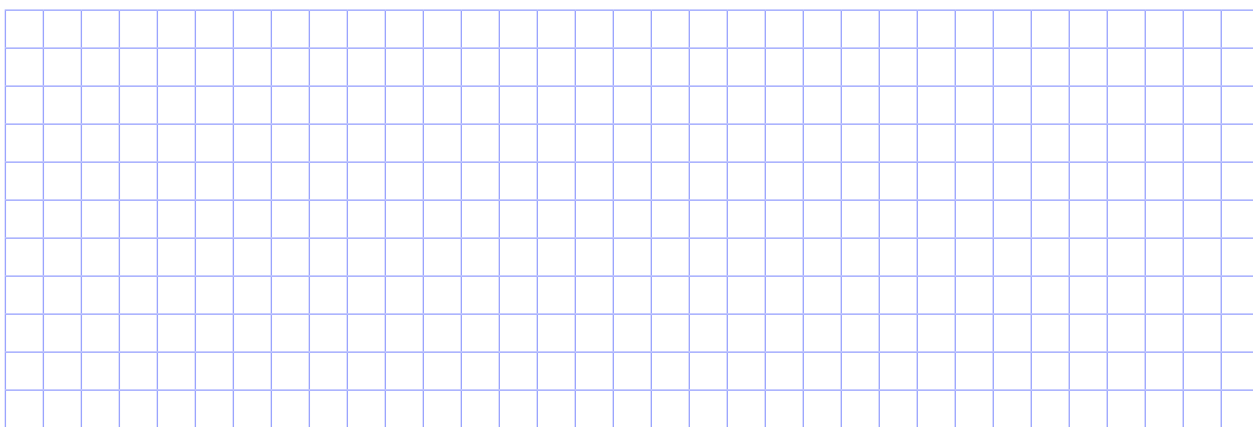


7. Обчисліть: $\lim_{n \rightarrow \infty} (n - \sqrt{n^2 + 4n})$.



Відповідь.

8. Знайдіть найбільше значення x , за яких числа $x - 1$, $2x - 1$ і $x^2 - 5$, записані в указаному порядку, утворюють арифметичну прогресію.



Відповідь.

Рефлексія

Сьогодні я повторив/повторила
.
.

Найважливішим для мене було
.
.

Тепер я вмію
.
.

Найскладнішим для мене було
.
.

Мені ще потрібно попрацювати над
.
.

