

# Тема 5.

## Моніторинг навчальних досягнень учнів/учениць

### Урок 1–2. Систематизація та узагальнення знань учнів/учениць

**Тип уроку:** урок повторення та систематизації.

#### План уроку

1. Співвідношення між тригонометричними функціями.
2. Тригонометричні рівняння.
3. Тригонометричні нерівності.
4. Числові послідовності. Границі числових послідовностей.
5. Захист учнівських проєктів.

#### Очікувані результати навчальних досягнень

Учень/учениця:

виокремлює в конкретній специфічній проблемній ситуації її складові частини, які можуть бути розв'язані математичними методами [12 МАО 1.1.1–2 П];

аналізує спільні та відмінні риси різних моделей і шляхів розв'язання специфічної проблемної ситуації [12 МАО 3.2.1–1 П];

робить висновки щодо застосування математичних понять і фактів [12 МАО 4.1.2–1 П];

використовує різні форми подання математичних об'єктів відповідно до специфіки проблемної ситуації [12 МАО 4.2.2–2 П].

#### Дружні поради вчителю/вчительці до уроку

- 1) Урок є підсумковим за результатами вивчення матеріалу першого семестру. Розрахований урок на дві академічні години.
- 2) Урок можна провести як урок-захист учнівських проєктів.
- 3) Для захисту проєктів забезпечте учнів/учениць технічними та навчальними засобами (ноутбуками, проекторами тощо).
- 4) Якщо ви проводите захист учнівських проєктів, то мотивуйте учнів/учениць до активного обговорення запропонованих проєктів.

- 5) Можете організувати повторення та систематизацію вивченого матеріалу впродовж семестру.
- 6) Теоретичний матеріал, поданий у конспекті, має схематичний та опорний характер. Ви можете його змінювати, доповнювати або деталізувати залежно від рівня підготовки учнівства.
- 7) Ілюстративні приклади доцільно пропонувати як тренувальні вправи. Їх можна опрацювати індивідуально, у парах або в групах.
- 8) Роботу над теоретичним матеріалом варто організувати у формі групової діяльності або фронтального опитування.
- 9) Запропонуйте учням/ученицям виконати завдання тренувального тесту.

## I. Організаційна частина (2–3 хв)

## II. Захист індивідуальних (групових) проєктів. Повторення та систематизація вивченого матеріалу

## III. Співвідношення між тригонометричними функціями

### 1. Залежність між тригонометричними функціями одного кута

**Таблиця формул для обчислення значень тригонометричних функцій кутів по заданому значенню однієї з них**

|                             | $\sin \alpha$                                      | $\cos \alpha$                                      | $\operatorname{tg} \alpha$                                                   | $\operatorname{ctg} \alpha$                                                    |
|-----------------------------|----------------------------------------------------|----------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------|
| $\sin \alpha$               |                                                    | $\pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}$                     | $\pm \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}}$ | $\pm \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha}}$                         |
| $\cos \alpha$               | $\pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$                     |                                                    | $\pm \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}}$                        | $\pm \frac{\operatorname{ctg} \alpha}{\sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha}}$ |
| $\operatorname{tg} \alpha$  | $\pm \frac{\sin \alpha}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}}$ | $\pm \frac{\sqrt{1 - \cos^2 \alpha}}{\cos \alpha}$ |                                                                              | $\frac{1}{\operatorname{ctg} \alpha}$                                          |
| $\operatorname{ctg} \alpha$ | $\pm \frac{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}}{\sin \alpha}$ | $\pm \frac{\cos \alpha}{\sqrt{1 - \cos^2 \alpha}}$ | $\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$                                         |                                                                                |

Вивчати всі формули не обов'язково. Варто запам'ятати лише певні формули й правила.

1) Якщо дано синус або косинус кута, то, за основною тригонометричною тотожністю  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ , можна знайти відповідно косинус або синус.

Якщо задана чверть, у якій лежить кут  $\alpha$ , то варто врахувати знак тригонометричної функції, якого набуває шукана тригонометрична функція в цій чверті.

За означенням тангенса або котангенса, знаходимо їхні значення.

2) Якщо дано тангенс або котангенс, то для знаходження синуса або косинуса варто скористатися формулами  $1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$  або  $1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$ .

Для знаходження котангенса або тангенса потрібно пам'ятати, що  $\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1$ .

Із означень тангенса або котангенса маємо:

$$\sin \alpha = \operatorname{tg} \alpha \cdot \cos \alpha \text{ та } \cos \alpha = \operatorname{ctg} \alpha \cdot \sin \alpha.$$

## 2. Тригонометричні тотожності додавання

1)  $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$ .

2)  $\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$ .

3)  $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$ .

4)  $\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$ .

5)  $\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}$ .

6)  $\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}$ .

7)  $\operatorname{ctg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta - 1}{\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta}$ .

8)  $\operatorname{ctg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta + 1}{\operatorname{ctg} \beta - \operatorname{ctg} \alpha}$ .

## 3. Тригонометричні тотожності подвійного аргументу

1)  $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha$ .

2)  $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$ .

3)  $\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$ .

4)  $\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha$ .

5)  $\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}$ .

## 4. Формули пониження степеня

1)  $\cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{2}$ .

2)  $\sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{2}$ .

3)  $\operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}$ .

4)  $\operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{1 - \cos \alpha}$ .

## 5. Формули половинного аргументу

1)  $\cos \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}$ .

2)  $\sin \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}$ .

3)  $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}}$ .

$$4) \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{1 - \cos \alpha}}.$$

$$5) \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha}.$$

$$6) \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha}.$$

## 6. Формули зведення

Повторити формули зведення можна за допомогою таблиці.

| $x$                       | $\sin x$       | $\cos x$       | $\operatorname{tg} x$        | $\operatorname{ctg} x$       |
|---------------------------|----------------|----------------|------------------------------|------------------------------|
| $\pi + \alpha$            | $-\sin \alpha$ | $-\cos \alpha$ | $\operatorname{tg} \alpha$   | $\operatorname{ctg} \alpha$  |
| $\pi - \alpha$            | $\sin \alpha$  | $-\cos \alpha$ | $-\operatorname{tg} \alpha$  | $-\operatorname{ctg} \alpha$ |
| $2\pi + \alpha$           | $\sin \alpha$  | $\cos \alpha$  | $\operatorname{tg} \alpha$   | $\operatorname{ctg} \alpha$  |
| $2\pi - \alpha$           | $-\sin \alpha$ | $\cos \alpha$  | $-\operatorname{tg} \alpha$  | $-\operatorname{ctg} \alpha$ |
| $\frac{\pi}{2} + \alpha$  | $\cos \alpha$  | $-\sin \alpha$ | $-\operatorname{ctg} \alpha$ | $-\operatorname{tg} \alpha$  |
| $\frac{\pi}{2} - \alpha$  | $\cos \alpha$  | $\sin \alpha$  | $\operatorname{ctg} \alpha$  | $\operatorname{tg} \alpha$   |
| $\frac{3\pi}{2} + \alpha$ | $-\cos \alpha$ | $\sin \alpha$  | $-\operatorname{ctg} \alpha$ | $-\operatorname{tg} \alpha$  |
| $\frac{3\pi}{2} - \alpha$ | $-\cos \alpha$ | $-\sin \alpha$ | $\operatorname{ctg} \alpha$  | $\operatorname{tg} \alpha$   |

### Мнемонічне правило для формул зведення

1. У правій частині рівності ставлять такий знак, який має ліва частина, за умови, що  $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ .
2. Якщо в лівій частині формули аргумент має вигляд  $\frac{\pi}{2} \pm \alpha$  або  $\frac{3\pi}{2} \pm \alpha$ , то синус міняють на косинус, тангенс — на котангенс, і навпаки. Якщо аргумент має вигляд  $\pi \pm \alpha$  або  $2\pi \pm \alpha$ , то зміни функції не відбувається.

Наприклад,  $\sin\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = -\cos \alpha$ .

Якщо  $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ , то кут  $\frac{3\pi}{2} - \alpha$  — кут III чверті, в якій синус — від'ємний.

Оскільки кут вигляду  $\frac{3\pi}{2} \pm \alpha$ , то синус міняємо на косинус.

$$\text{Звідки } \sin\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = -\cos \alpha.$$

## 7. Формули перетворення суми й різниці тригонометричних функцій у добуток

$$1) \sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2}.$$

$$2) \sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha + \beta}{2}.$$

$$3) \cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2}.$$

$$4) \cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \sin \frac{\alpha - \beta}{2}.$$

$$5) \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos \alpha \cdot \cos \beta}.$$

$$6) \operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos \alpha \cdot \cos \beta}.$$

## 8. Формули перетворення добутку тригонометричних функцій у суму

$$1) \sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} (\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)).$$

$$2) \cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} (\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)).$$

$$3) \sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} (\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)).$$

9. Формули перетворення синуса й косинуса кута через тангенс половини цього кута.

$$1) \sin \alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}.$$

$$2) \cos \alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}.$$

$$3) \operatorname{tg} \alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}.$$

## Поради учню/учениці при перетворенні тригонометричних виразів

1) При виконанні вправ замість  $\alpha$  можуть бути інші вирази, але це не означає, що не можна використовувати вивчені формули.

Наприклад,  $\cos^2(5\beta - 2) + \sin^2(5\beta - 2) = 1$  або  $\operatorname{tg} \gamma = \frac{\sin \frac{\gamma}{2}}{\cos \frac{\gamma}{2}}$  тощо.

2) Пам'ятайте, що  $1 - \sin^2 \alpha = \cos^2 \alpha$ ,  $1 - \cos^2 \alpha = \sin^2 \alpha$ ,  $\sin^2 \alpha - 1 = -\cos^2 \alpha$ ,  $\cos^2 \alpha - 1 = -\sin^2 \alpha$ .

3) Іноді корисно замість 1 записати  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha$ .

4) Якщо вираз містить тангенс або котангенс, то подавайте їх у вигляді дробових виразів  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ ,  $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$ .

5) Використовуйте тотожності скороченого множення.

6) Якщо ви перетворюєте дробовий вираз, то розкладайте чисельник і знаменник на множники.

7) Якщо у виразі є декілька кутів, то використовуйте формули зведення, якщо це можливо.

8) Якщо у виразі є тригонометрична функція від суми чи різниці, то перетворюйте вираз за відповідними формулами.

## Ілюстративні приклади

**1.** Обчисліть  $\frac{\sin \alpha}{\sin^3 \alpha + \cos^3 \alpha}$ , якщо  $\operatorname{tg} \alpha = 2$ .

$$\begin{aligned} \text{Розв'язання. } \frac{\sin \alpha}{\sin^3 \alpha + \cos^3 \alpha} &= \frac{\frac{\sin \alpha}{\cos^3 \alpha}}{\frac{\sin^3 \alpha}{\cos^3 \alpha} + 1} = \frac{\operatorname{tg} \alpha \cdot \frac{1}{\cos^2 \alpha}}{\operatorname{tg}^3 \alpha + 1} = \\ &= \frac{\operatorname{tg} \alpha \cdot (\operatorname{tg}^2 \alpha + 1)}{\operatorname{tg}^3 \alpha + 1} = \frac{2 \cdot (2^2 + 1)}{2^3 + 1} = \frac{10}{9}. \end{aligned}$$

Відповідь.  $\frac{10}{9}$ .

**2.** Знайдіть  $\alpha - \beta$ , якщо  $\sin \alpha = \frac{40}{41}$ ,  $\sin \beta = -\frac{9}{41}$ ,  $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ ,  $-\frac{\pi}{2} < \beta < 0$ .

Розв'язання. Оскільки  $0 < -\beta < \frac{\pi}{2}$ , то  $0 < \alpha - \beta < \pi$ .

$$\text{Маємо } \cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \frac{9}{41}, \quad \cos \beta = \sqrt{1 - \sin^2 \beta} = \frac{40}{41}.$$

$$\text{Тоді } \cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta = \frac{9}{41} \cdot \frac{40}{41} + \frac{40}{41} \cdot \left(-\frac{9}{41}\right) = 0.$$

Оскільки  $\cos(\alpha - \beta) = 0$  і  $0^\circ < \alpha - \beta < 180^\circ$ , то  $\alpha - \beta = \frac{\pi}{2}$ .

Відповідь.  $\frac{\pi}{2}$ .

3. Відомо, що  $\operatorname{ctg}(60^\circ - 2\alpha) + \operatorname{ctg}(30^\circ + 2\alpha) = a$ . Знайдіть  $\operatorname{ctg}^2(60^\circ - 2\alpha) + \operatorname{ctg}^2(30^\circ + 2\alpha)$ .

*Розв'язання.* Оскільки  $60^\circ - 2\alpha + 30^\circ + 2\alpha = 90^\circ$ , то  $\operatorname{ctg}(60^\circ - 2\alpha) = \operatorname{tg}(30^\circ + 2\alpha)$ .

$$\begin{aligned} \text{Тоді } & \operatorname{ctg}^2(60^\circ - 2\alpha) + \operatorname{ctg}^2(30^\circ + 2\alpha) = \\ & = (\operatorname{ctg}(60^\circ - 2\alpha) + \operatorname{ctg}(30^\circ + 2\alpha))^2 - 2\operatorname{ctg}(60^\circ - 2\alpha)\operatorname{ctg}(30^\circ + 2\alpha) = \\ & = a^2 - 2\operatorname{tg}(30^\circ + 2\alpha)\operatorname{ctg}(30^\circ + 2\alpha) = a^2 - 2. \end{aligned}$$

*Відповідь.*  $a^2 - 2$ .

4. Перетворіть  $\sin^4 \alpha \cos^2 \alpha$  у суму.

$$\begin{aligned} \text{Розв'язання. } & \sin^4 \alpha \cos^2 \alpha = \sin^2 \alpha (\sin \alpha \cos \alpha)^2 = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2} \cdot \frac{\sin^2 2\alpha}{4} = \\ & = \frac{1}{8} (1 - \cos 2\alpha) \frac{1 - \cos 4\alpha}{2} = \frac{1}{16} (1 - \cos 2\alpha - \cos 4\alpha + \cos 2\alpha \cos 4\alpha) = \\ & = \frac{1}{16} \left( 1 - \cos 2\alpha - \cos 4\alpha + \frac{\cos 6\alpha + \cos 2\alpha}{2} \right) = \frac{1}{16} - \frac{\cos 2\alpha}{32} - \frac{\cos 4\alpha}{16} + \frac{\cos 6\alpha}{32}. \end{aligned}$$

$$\text{Відповідь. } \frac{1}{16} - \frac{\cos 2\alpha}{32} - \frac{\cos 4\alpha}{16} + \frac{\cos 6\alpha}{32}.$$

5. Доведіть тотожність  $\sin^2 \alpha + \cos\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right) \cos\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right) = \frac{1}{4}$ .

$$\begin{aligned} \text{Доведення. } & \sin^2 \alpha + \cos\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right) \cos\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right) = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2} + \frac{1}{2} \left( \cos 2\alpha + \cos \frac{2\pi}{3} \right) = \\ & = \frac{1}{2} - \frac{\cos 2\alpha}{2} + \frac{\cos 2\alpha}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}, \text{ що й треба було довести.} \end{aligned}$$

6. Спростіть вираз  $\frac{\sin(\pi - x) \cdot \operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)}{\cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) \cdot \operatorname{ctg}(\pi - x)}$ .

$$\text{Розв'язання. } \frac{\sin(\pi - x) \cdot \operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)}{\cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) \cdot \operatorname{ctg}(\pi - x)} = \frac{\sin x \cdot \operatorname{tg}\left(-\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right)}{\sin x \cdot (-\operatorname{ctg} x)} = \frac{-\sin x \cdot \operatorname{ctg} x}{-\sin x \cdot \operatorname{ctg} x} = 1.$$

*Відповідь.* 1.

7. Знайдіть множину значень функції  $y = \cos^4 x - \sin^4 x$ . Укажіть найменший додатний період функції.

$$\text{Розв'язання. } y = \cos^4 x - \sin^4 x = (\cos^2 x - \sin^2 x)(\cos^2 x + \sin^2 x) = 1 \cdot \cos 2x = \cos 2x.$$

Отже, функція  $y = \cos^4 x - \sin^4 x$  тотожна функції  $y = \cos 2x$ .

Оскільки  $-1 \leq \cos 2x \leq 1$ , то  $E(y)$ :  $y \in [-1; 1]$ .

Період функції  $y = \cos 2x$  становить  $T = \frac{2\pi}{2} = \pi$ .

*Відповідь.*  $y \in [-1; 1]$ ,  $T = \pi$ .

## IV. Тригонометричні рівняння

### Розв'язування рівняння $\cos x = a$ , якщо $a = 1$ , $a = -1$ , $a = 0$

Нагадаємо декілька фактів про функцію  $y = \cos x$ .

1) Функція  $y = \cos x$  досягає свого найбільшого значення, яке дорівнює 1 у точках виду  $2\pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ . Тому  $x = 2\pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$  є коренями рівняння  $\cos x = 1$ .

2) Функція  $y = \cos x$  досягає свого найменшого значення, яке дорівнює  $-1$  у точках виду  $\pi + 2\pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ . Тому  $x = \pi + 2\pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$  є коренями рівняння  $\cos x = -1$ .

3) Нулями функції  $y = \cos x$  є числа виду  $\frac{\pi}{2} + \pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ . Тому  $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$  є коренями рівняння  $\cos x = 0$ .

Узагальнимо дані у вигляді таблиці:

|               |                                               |
|---------------|-----------------------------------------------|
| $\cos x = 1$  | $x = 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$                |
| $\cos x = -1$ | $x = \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$          |
| $\cos x = 0$  | $x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$ |

Запишемо загальну формулу коренів рівняння  $\cos x = a$ ,  $|a| \leq 1$ :

$$x = \pm \arccos a + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

**Означення. Арккосинусом** числа  $a$  ( $|a| \leq 1$ ) називають кут  $\alpha$  ( $0 \leq \alpha \leq \pi$ ), косинус якого дорівнює  $a$ , тобто  $\cos \alpha = a$ .

### Основні властивості арккосинуса

1) Для  $|a| \leq 1$  існує єдине значення арккосинуса.

2) Для  $|a| > 1$  значень арккосинуса не існує, тобто вирази  $\arccos 3$ ,  $\arccos\left(-\frac{\pi}{3}\right)$ ,  $\arccos \pi$ ,  $\arccos(-4)$  не мають змісту.

3) Якщо  $|a| \leq 1$ , то  $\cos(\arccos a) = a$ .

4)  $\arccos(-a) = \pi - \arccos a$ .

5)  $\arccos(\cos x) = x$  якщо  $0 \leq x \leq \pi$ .

### Розв'язування рівняння $\sin x = a$ , якщо $a = 1$ , $a = -1$ , $a = 0$

Нагадаємо декілька фактів про функцію  $y = \sin x$ .

1) Функція  $y = \sin x$  досягає свого найбільшого значення, яке дорівнює 1 у точках виду  $\frac{\pi}{2} + 2\pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ . Тому  $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$  є коренями рівняння  $\sin x = 1$ .

2) Функція  $y = \sin x$  досягає свого найменшого значення, яке дорівнює  $-1$  у точках виду  $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ . Тому  $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$  є коренями рівняння  $\sin x = -1$ .

3) Нулями функції  $y = \sin x$  є числа виду  $\pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ . Тому  $x = \pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$  є коренями рівняння  $\sin x = 0$ .

Узагальнимо дані у вигляді таблиці.

|               |                                                 |
|---------------|-------------------------------------------------|
| $\sin x = 1$  | $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$  |
| $\sin x = -1$ | $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$ |
| $\sin x = 0$  | $x = \pi n, n \in \mathbb{Z}$                   |

Загальна формула коренів рівняння  $\sin x = a, |a| \leq 1$ :  $x = (-1)^k \arcsin a + \pi k, k \in \mathbb{Z}$ .

**Означення. Арксинусом** числа  $a$  ( $|a| \leq 1$ ) називають кут  $\alpha \left( -\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2} \right)$ , синус якого дорівнює  $a$ , тобто  $\sin \alpha = a$ .

### Основні властивості арксинуса

- 1) Для  $|a| \leq 1$  існує єдине значення арксинуса.
- 2) Для  $|a| > 1$  значень арксинуса не існує, тобто вирази  $\arcsin \sqrt{2}$ ,  $\arcsin \left( -\frac{\pi}{2} \right)$ ,  $\arcsin 1, 2$ ,  $\arcsin(-4)$  не мають змісту.
- 3) Якщо  $|a| \leq 1$ , то  $\sin(\arcsin a) = a$ .
- 4)  $\arcsin(\sin x) = x$ , якщо  $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ .
- 5)  $\arcsin(-a) = -\arcsin a$ .

### Формула коренів рівняння $\operatorname{tg} x = a$

Множину коренів рівняння  $\operatorname{tg} x = a$  можна записати у вигляді:

$$x = \operatorname{arctg} a + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

### Означення арктангенса числа $a$

Кут  $\alpha \in \left( -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right)$  має спеціальну назву — арктангенс.

**Означення. Арктангенсом** числа  $a$  називають такий кут  $\alpha$  з проміжку  $\left( -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right)$ , тангенс якого дорівнює  $a$ .

### Основні властивості арктангенса

- 1) Для будь-якого числа  $a$  існує єдине значення арктангенса.
- 2) Для будь-якого числа  $a$  виконується рівність  $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} a) = a$ .
- 3)  $\operatorname{arctg}(-a) = -\operatorname{arctg} a$ .

## Формула коренів рівняння $\operatorname{ctg} x = a$

Множину коренів рівняння  $\operatorname{ctg} x = a$  можна записати у такому вигляді:

$$x = \operatorname{arccotg} a + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

## Означення арккотангенса числа $a$

Кут  $\alpha \in (0; \pi)$  має спеціальну назву — арккотангенс.

**Означення.** Арккотангенсом числа  $a$  називають такий кут  $\alpha$  з проміжку  $(0; \pi)$ , котангенс якого дорівнює  $a$ .

## Основні властивості арккотангенса

- 1) Для будь-якого числа  $a$  існує єдине значення арккотангенса.
- 2) Для будь-якого числа  $a$  виконується рівність  $\operatorname{ctg}(\operatorname{arccotg} a) = a$ .
- 3)  $\operatorname{arccotg}(-a) = \pi - \operatorname{arccotg} a$ .

## Ілюстративні приклади

- 8.** Розв'яжіть рівняння  $\cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{x}{3}\right) = 1$ .

*Розв'язання.* Скористаємось парністю функції  $y = \cos x$  і перепишемо дане рівняння у вигляді  $\cos\left(\frac{x}{3} - \frac{\pi}{3}\right) = 1$ .

Тоді:  $\frac{x}{3} - \frac{\pi}{3} = 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad \frac{x}{3} = \frac{\pi}{3} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad x = \pi + 6\pi n, \quad n \in \mathbb{Z},$

*Відповідь.*  $\pi + 6\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$ .

- 9.** Розв'яжіть рівняння  $\sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = 1$ .

*Розв'язання.*  $\sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = 1, \quad \frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad \frac{x}{2} = -\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z},$

$\frac{x}{2} = \frac{\pi}{4} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad x = \frac{\pi}{2} + 4\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$

*Відповідь.*  $\frac{\pi}{2} + 4\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$

- 10.** Розв'яжіть рівняння  $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{6} - \frac{x}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$ .

*Розв'язання.* Оскільки функція  $f(x) = \operatorname{tg} x$  непарна, то:

$\operatorname{tg}\left(\frac{x}{3} - \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{3}, \quad \frac{x}{3} - \frac{\pi}{6} = \operatorname{arctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z},$

$\frac{x}{3} - \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{6} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad \frac{x}{3} = \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad x = 3\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$

*Відповідь.*  $3\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$

**11.** Розв'яжіть рівняння  $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{3} - 4x\right) = \sqrt{3}$ .

*Розв'язання.* Оскільки функція  $f(x) = \operatorname{ctg} x$  непарна, то:  $\operatorname{ctg}\left(4x - \frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}$ ,

$$4x - \frac{\pi}{3} = \operatorname{arccotg}(-\sqrt{3}) + \pi n, n \in \mathbb{Z}, \quad 4x - \frac{\pi}{3} = \pi - \operatorname{arccotg} \sqrt{3} + \pi n, n \in \mathbb{Z},$$

$$4x - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}, \quad 4x = \frac{\pi}{3} + \frac{5\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}, \quad 4x = \frac{7\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z},$$

$$x = \frac{7\pi}{24} + \frac{\pi n}{4}, n \in \mathbb{Z}.$$

*Відповідь.*  $\frac{7\pi}{24} + \frac{\pi n}{4}, n \in \mathbb{Z}$ .

**12.** Розв'яжіть рівняння  $3\sin x = 2\cos^2 x$ .

*Розв'язання.* Використаємо формулу  $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ .

Запишемо рівняння у вигляді:  $3\sin x = 2(1 - \sin^2 x)$ . Розв'яжемо рівняння як квадратне відносно  $\sin x$ , тобто  $2\sin^2 x + 3\sin x - 2 = 0$ ,  $D = 9 + 16 = 25$ .

Тоді  $\sin x = \frac{-3-5}{4} = -3$ , що неможливо або  $\sin x = \frac{-3+5}{4} = \frac{1}{2}$ .

Отже,  $\sin x = \frac{1}{2}$ , звідси  $x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$ .

*Відповідь.*  $(-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$ .

**13.** Розв'яжіть рівняння  $1 + \sqrt{2} \sin \frac{\pi x}{4} = 0$  на проміжку  $(-2; 10)$ .

*Розв'язання.*  $1 + \sqrt{2} \sin \frac{\pi x}{4} = 0$ ,  $\sin \frac{\pi x}{4} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ ,  $\sin \frac{\pi x}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ ,

$$\frac{\pi x}{4} = (-1)^k \arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \pi k, k \in \mathbb{Z},$$

$$\frac{\pi x}{4} = (-1)^{k+1} \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}, \quad \frac{x}{4} = (-1)^{k+1} \frac{1}{4} + k, k \in \mathbb{Z},$$

$$x = (-1)^{k+1} + 4k, k \in \mathbb{Z}, \quad \begin{cases} x = -1 + 4 \cdot 2n, \\ x = 1 + 4 \cdot (2n+1), n \in \mathbb{Z}. \end{cases} \quad \begin{cases} x = 8n-1, \\ x = 8n+5, n \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

$$1) x = 8n-1, -2 < 8n-1 < 10, -1 < 8n < 11, -\frac{1}{8} < n < \frac{11}{8}.$$

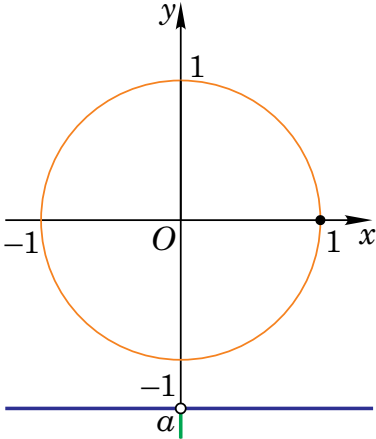
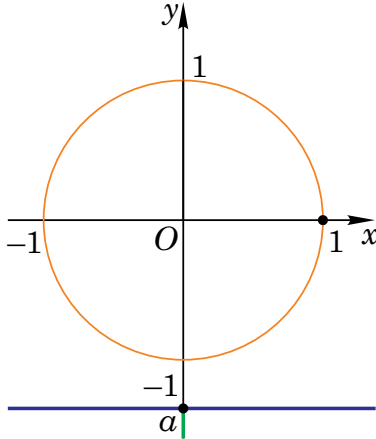
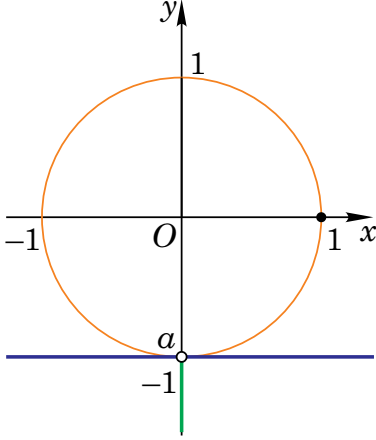
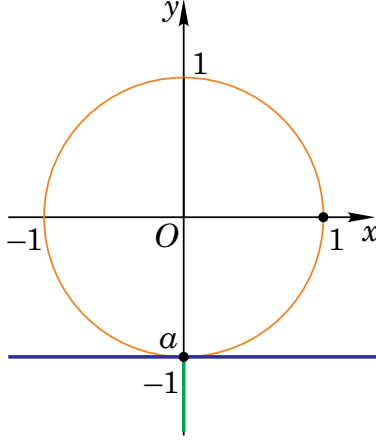
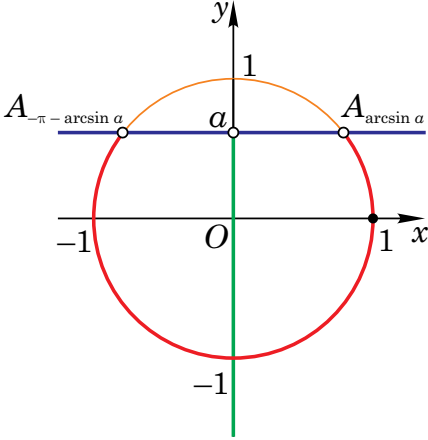
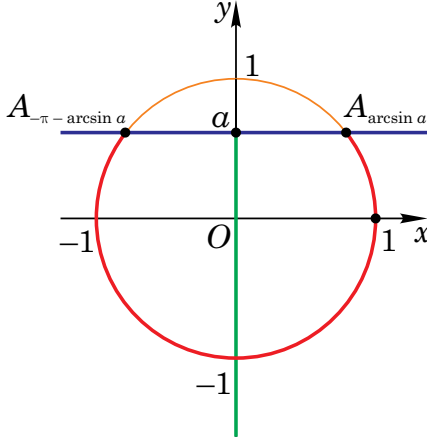
Цю умову задовольняють значення  $n = 0$  та  $n = 1$ , тобто коренями є  $x = -1$  та  $x = 7$ .

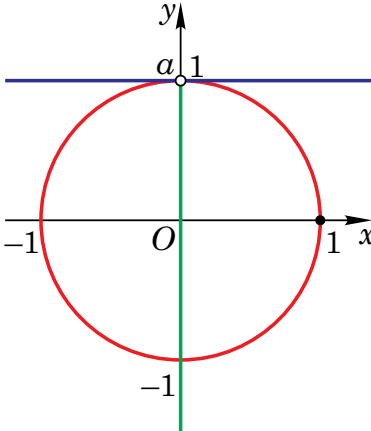
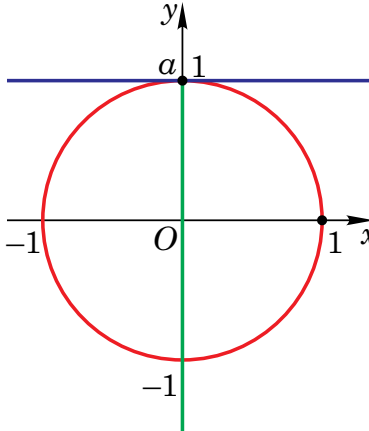
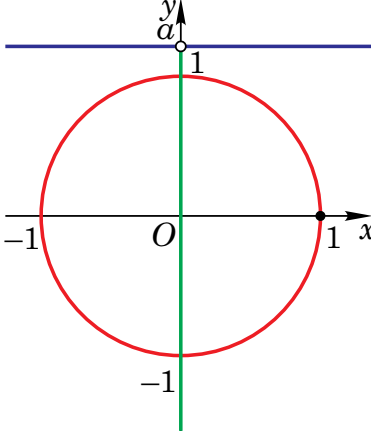
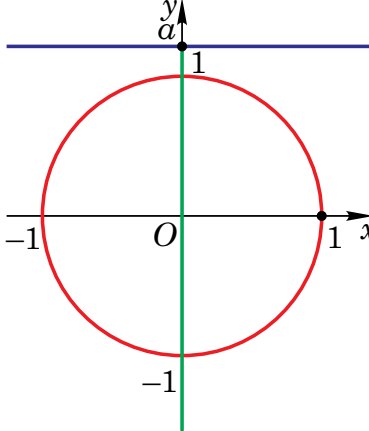
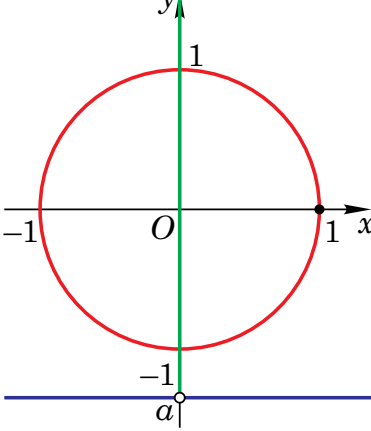
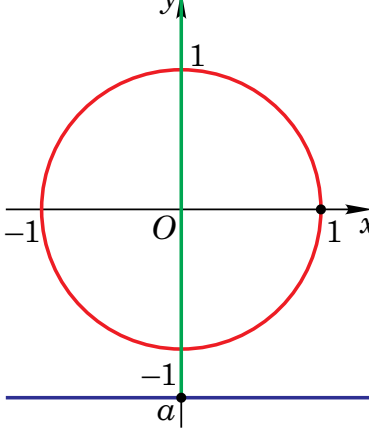
$$2) x = 8n+5, -2 < 8n+5 < 10, -7 < 8n < 5, -\frac{7}{8} < n < \frac{5}{8}.$$

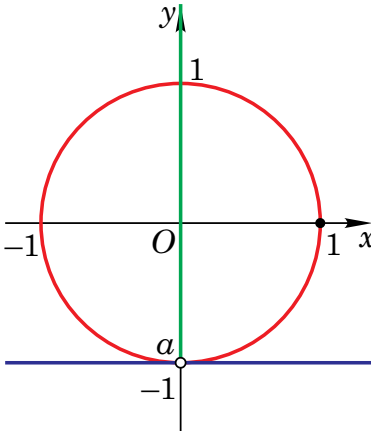
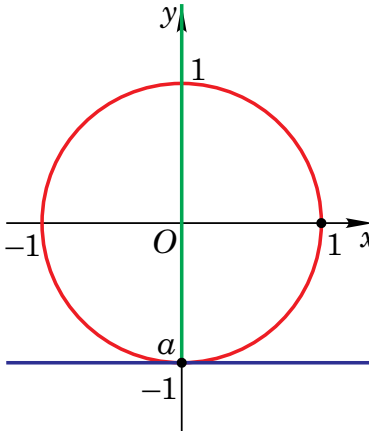
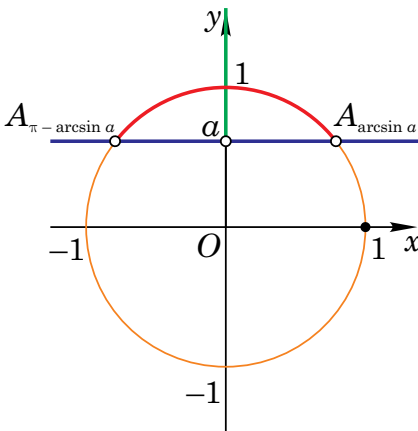
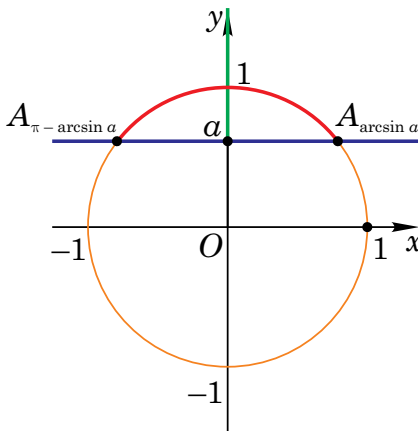
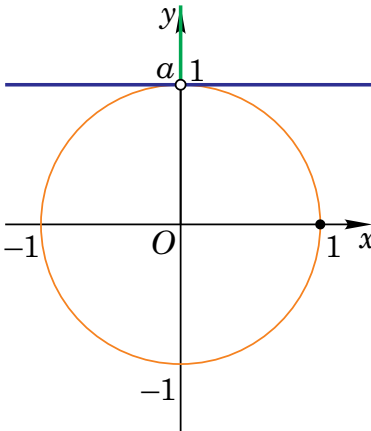
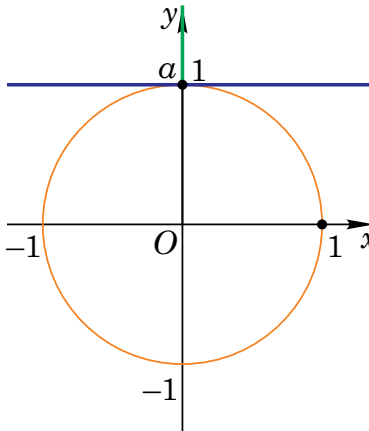
Цю умову задовольняє лише  $n = 0$ , тобто  $x = 5$  є коренем рівняння.

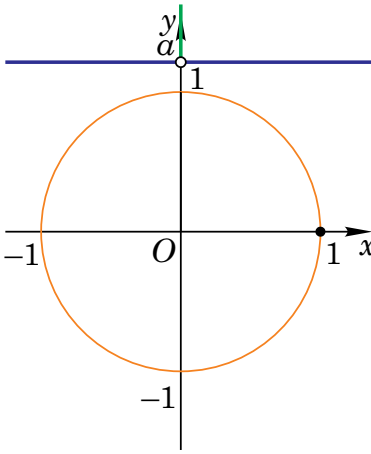
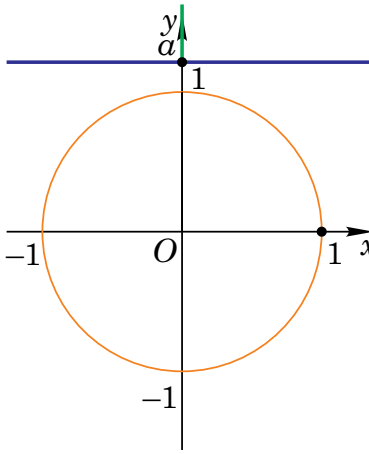
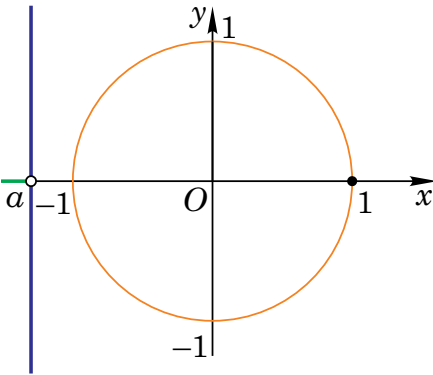
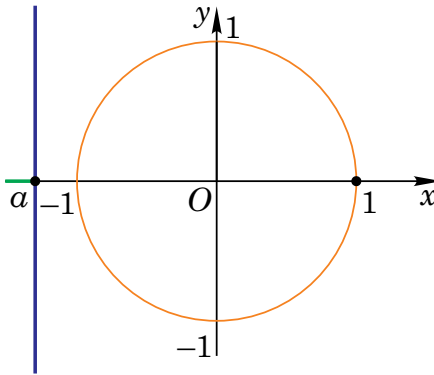
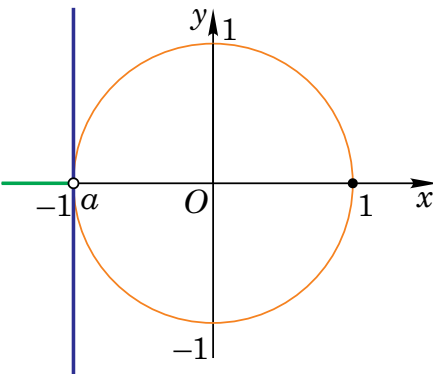
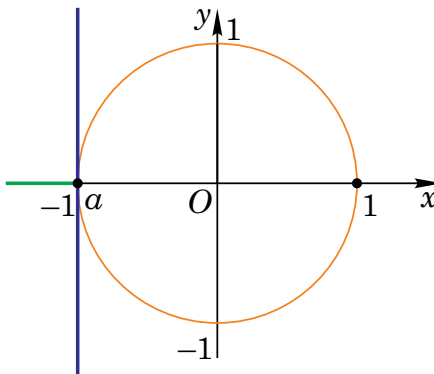
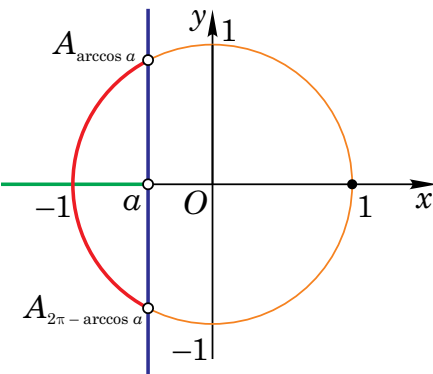
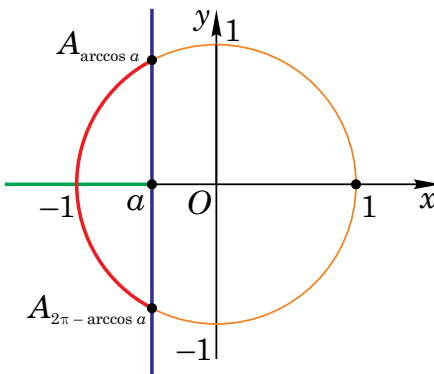
*Відповідь.*  $-1; 5; 7$ .

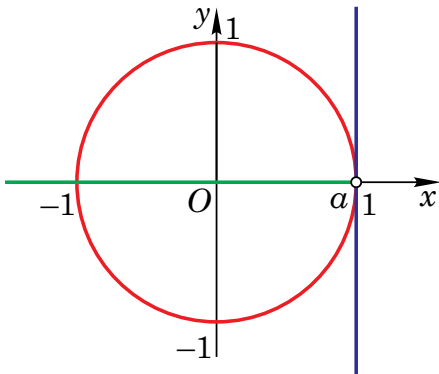
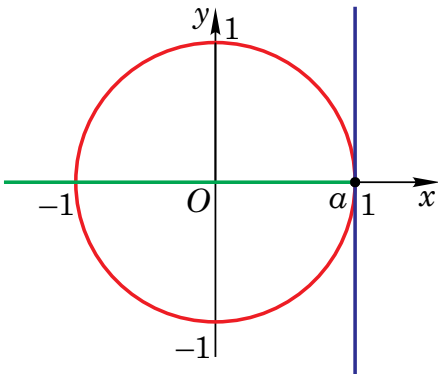
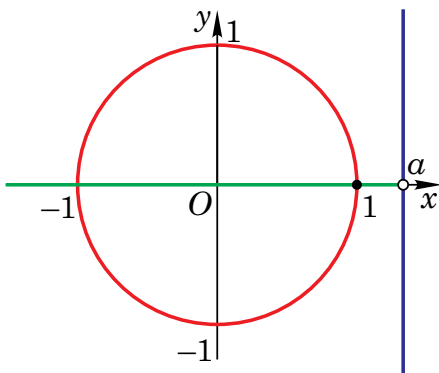
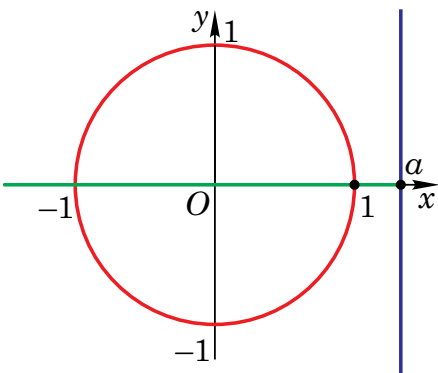
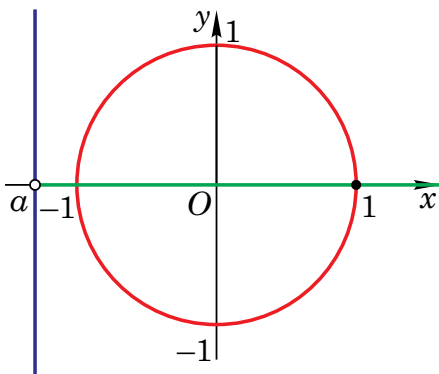
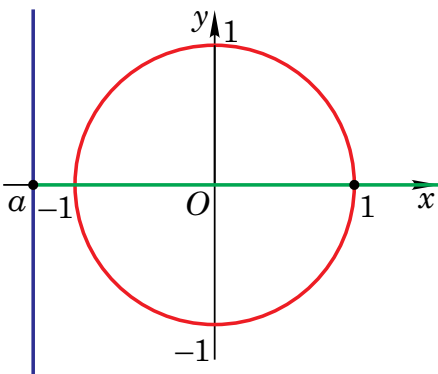
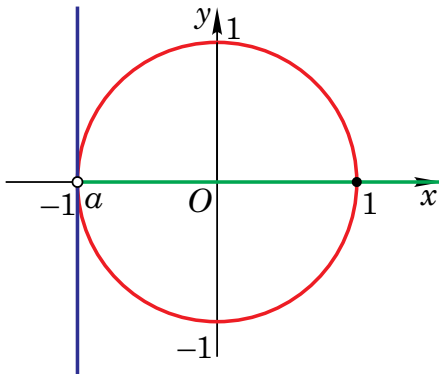
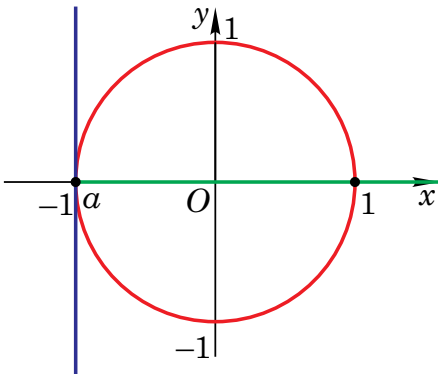
## V. Тригонометричні нерівності

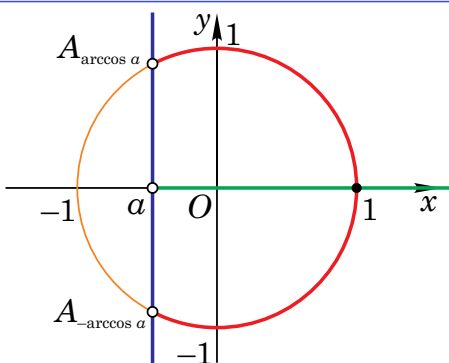
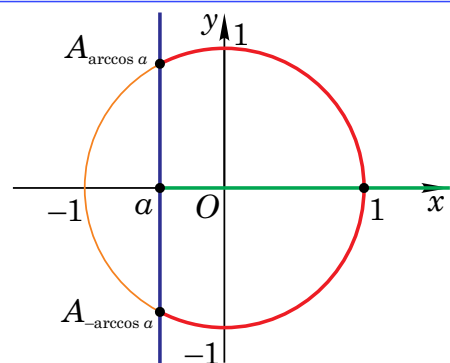
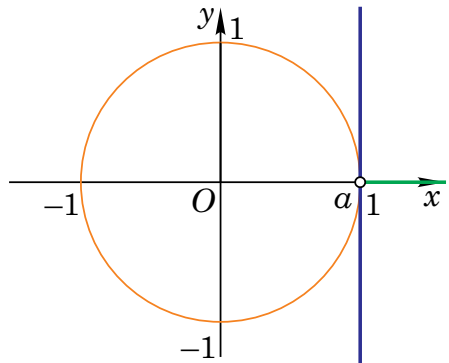
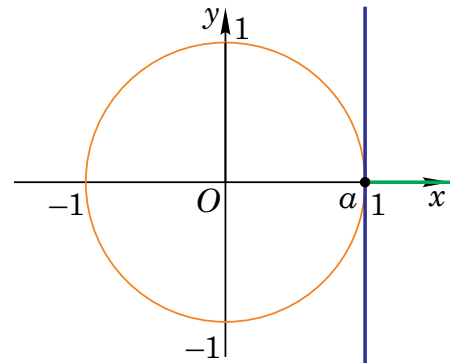
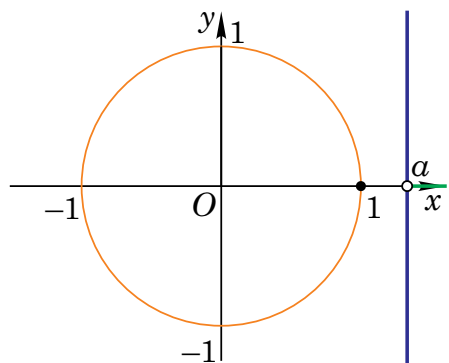
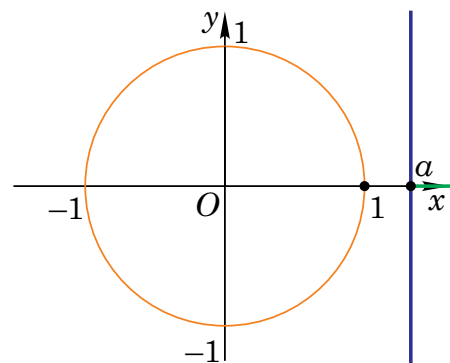
|              | Нерівність $\sin x < a$                                                                                                                                                            | Нерівність $\sin x \leq a$                                                                                                                                                          |
|--------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $a < -1$     |  <p>Не має розв'язків</p>                                                                         |  <p>Не має розв'язків</p>                                                                         |
| $a = -1$     |  <p>Не має розв'язків</p>                                                                        |  <p><math>x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}</math></p>                               |
| $-1 < a < 1$ |  <p><math>-\pi - \arcsin a + 2\pi n &lt; x &lt; \arcsin a + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}</math></p> |  <p><math>-\pi - \arcsin a + 2\pi n \leq x \leq \arcsin a + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}</math></p> |

|          | Нерівність $\sin x < a$                                                                                                                                                  | Нерівність $\sin x \leq a$                                                                              |
|----------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $a = 1$  |  $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + 2\pi n \right\}, n \in \mathbb{Z}$ |  $x \in \mathbb{R}$   |
| $a > 1$  |  $x \in \mathbb{R}$                                                                    |  $x \in \mathbb{R}$  |
|          | Нерівність $\sin x > a$                                                                                                                                                  | Нерівність $\sin x \geq a$                                                                              |
| $a < -1$ |  $x \in \mathbb{R}$                                                                   |  $x \in \mathbb{R}$ |

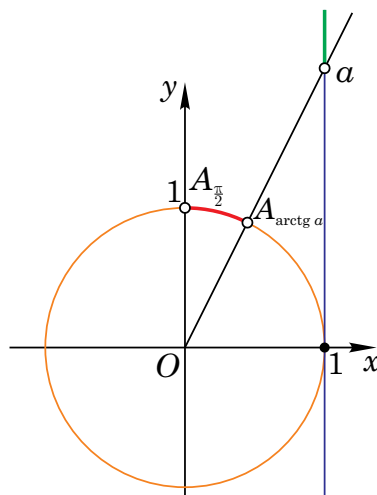
|              | Нерівність $\sin x > a$                                                                                                                                                   | Нерівність $\sin x \geq a$                                                                                                                                      |
|--------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $a = -1$     |  $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{\pi}{2} + 2\pi n \right\}, n \in \mathbb{Z}$ |  $x \in \mathbb{R}$                                                           |
| $-1 < a < 1$ |  $\arcsin a + 2\pi n < x < \pi - \arcsin a + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$                  |  $\arcsin a + 2\pi n \leq x \leq \pi - \arcsin a + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$ |
| $a = 1$      |  <p>Не має розв'язків</p>                                                              |  $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$                             |

|              | Нерівність $\sin x > a$                                                                                                                                                                            | Нерівність $\sin x \geq a$                                                                                                                                                                           |
|--------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $a > 1$      |  <p>Не має розв'язків</p>                                                                                         |  <p>Не має розв'язків</p>                                                                                          |
|              | Нерівність $\cos x < a$                                                                                                                                                                            | Нерівність $\cos x \leq a$                                                                                                                                                                           |
| $a < -1$     |  <p>Не має розв'язків</p>                                                                                        |  <p>Не має розв'язків</p>                                                                                         |
| $a = -1$     |  <p>Не має розв'язків</p>                                                                                       |  <p><math>x = \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}</math></p>                                                          |
| $-1 < a < 1$ |  <p><math>\arccos a + 2\pi n &lt; x &lt; 2\pi - \arccos a + 2\pi n</math><br/><math>n \in \mathbb{Z}</math></p> |  <p><math>\arccos a + 2\pi n \leq x \leq 2\pi - \arccos a + 2\pi n,</math><br/><math>n \in \mathbb{Z}</math></p> |

|          | Нерівність $\cos x < a$                                                                                                                             | Нерівність $\cos x \leq a$                                                                              |
|----------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $a = 1$  |  $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\pi n\}, n \in \mathbb{Z}$         |  $x \in \mathbb{R}$   |
| $a > 1$  |  $x \in \mathbb{R}$                                                |  $x \in \mathbb{R}$   |
|          | Нерівність $\cos x > a$                                                                                                                             | Нерівність $\cos x \geq a$                                                                              |
| $a < -1$ |  $x \in \mathbb{R}$                                              |  $x \in \mathbb{R}$ |
| $a = -1$ |  $x \in \mathbb{R} \setminus \{\pi + 2\pi n\}, n \in \mathbb{Z}$ |  $x \in \mathbb{R}$ |

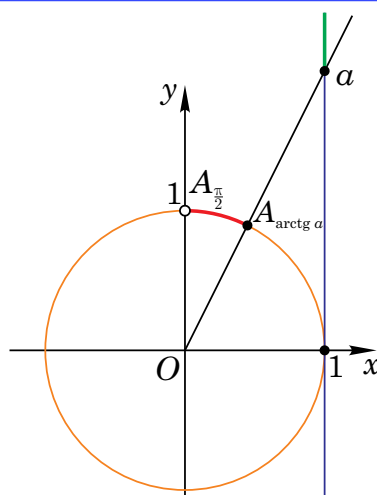
|              | Нерівність $\cos x > a$                                                                                                                                                                      | Нерівність $\cos x \geq a$                                                                                                                                                                    |
|--------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $-1 < a < 1$ |  <p><math>-\arccos a + 2\pi n &lt; x &lt; \arccos a + 2\pi n,</math><br/> <math>n \in \mathbb{Z}</math></p> |  <p><math>-\arccos a + 2\pi n \leq x \leq \arccos a + 2\pi n,</math><br/> <math>n \in \mathbb{Z}</math></p> |
| $a = 1$      |  <p>Не має розв'язків</p>                                                                                  |  <p><math>x = 2\pi n, n \in \mathbb{Z}</math></p>                                                          |
| $a > 1$      |  <p>Не має розв'язків</p>                                                                                 |  <p>Не має розв'язків</p>                                                                                 |

**Нерівність**  
 **$\operatorname{tg} x > a$**



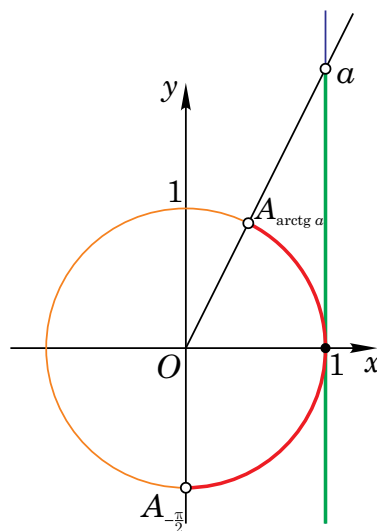
$$\operatorname{arctg} x + \pi n < x < \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

**Нерівність**  
 **$\operatorname{tg} x \geq a$**

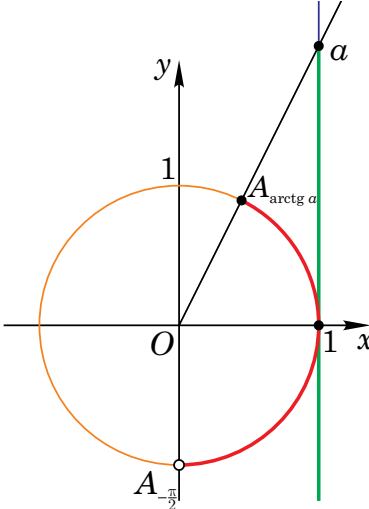
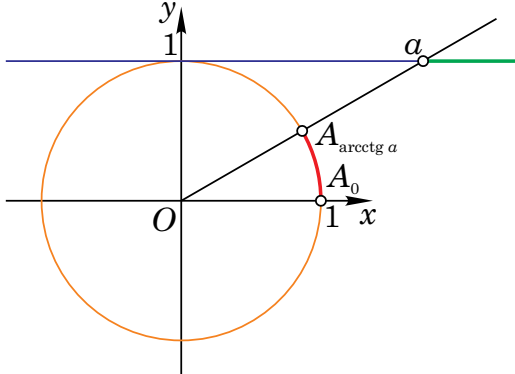
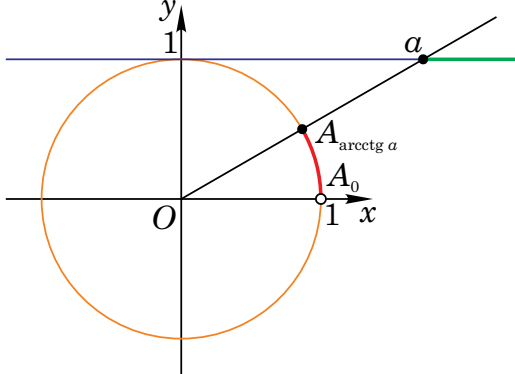
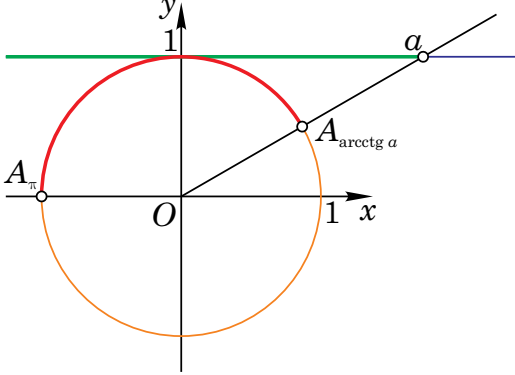


$$\operatorname{arctg} x + \pi n \leq x < \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

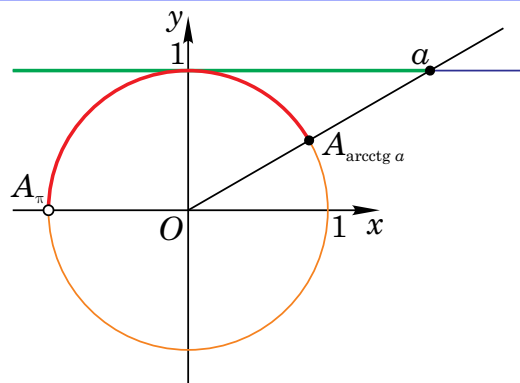
**Нерівність**  
 **$\operatorname{tg} x < a$**



$$-\frac{\pi}{2} + \pi n < x < \operatorname{arctg} x + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

|                                                                              |                                                                                                                                                                                                            |
|------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p><b>Нерівність</b><br/><b><math>\operatorname{tg} x \leq a</math></b></p>  |  <p><math display="block">-\frac{\pi}{2} + \pi n &lt; x \leq \operatorname{arctg} a + \pi n, n \in \mathbb{Z}</math></p> |
| <p><b>Нерівність</b><br/><b><math>\operatorname{ctg} x &gt; a</math></b></p> |  <p><math display="block">\pi n &lt; x &lt; \operatorname{arctg} a + \pi n, n \in \mathbb{Z}</math></p>                 |
| <p><b>Нерівність</b><br/><b><math>\operatorname{ctg} x \geq a</math></b></p> |  <p><math display="block">\pi n &lt; x \leq \operatorname{arctg} a + \pi n, n \in \mathbb{Z}</math></p>                |
| <p><b>Нерівність</b><br/><b><math>\operatorname{ctg} x &lt; a</math></b></p> |  <p><math display="block">\operatorname{arctg} a + \pi n &lt; x &lt; \pi + \pi n, n \in \mathbb{Z}</math></p>          |

**Нерівність**  
 **$\operatorname{ctg} x \leq a$**



$$\operatorname{arctg} a + \pi n \leq x < \pi + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

**Ілюстративні приклади**

- 14.** Розв'яжіть нерівність  $2\cos 3x \geq \sqrt{3}$ .

*Розв'язання.* Виконаємо побудову (див. рисунок).

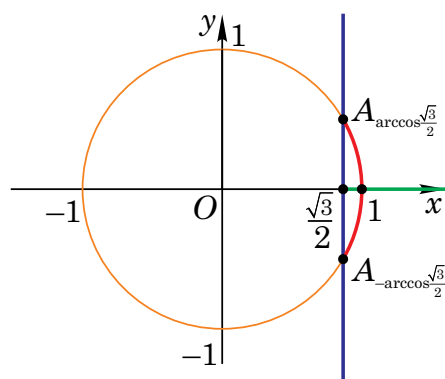
$$\cos 3x \geq \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$-\arccos \frac{\sqrt{3}}{2} + 2\pi n < 3x < \arccos \frac{\sqrt{3}}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z},$$

$$-\frac{\pi}{6} + 2\pi n < 3x < \frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z},$$

$$-\frac{\pi}{18} + \frac{2\pi n}{3} < x < \frac{\pi}{18} + \frac{2\pi n}{3}, n \in \mathbb{Z}.$$

*Відповідь.*  $-\frac{\pi}{18} + \frac{2\pi n}{3} < x < \frac{\pi}{18} + \frac{2\pi n}{3}, n \in \mathbb{Z}.$



- 15.** Розв'яжіть нерівність  $\sin 2x \geq \frac{1}{2}$ .

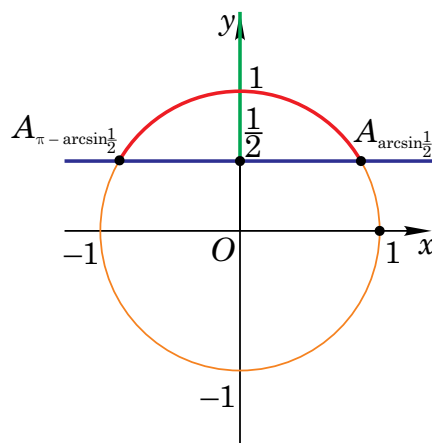
*Розв'язання.* Виконаємо побудову (див. рисунок).

$$\arcsin \frac{1}{2} + 2\pi n \leq 2x \leq \pi - \arcsin \frac{1}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z},$$

$$\frac{\pi}{6} + 2\pi n \leq 2x \leq \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z},$$

$$\frac{\pi}{12} + \pi n \leq x \leq \frac{5\pi}{12} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

*Відповідь.*  $\frac{\pi}{12} + \pi n \leq x \leq \frac{5\pi}{12} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$



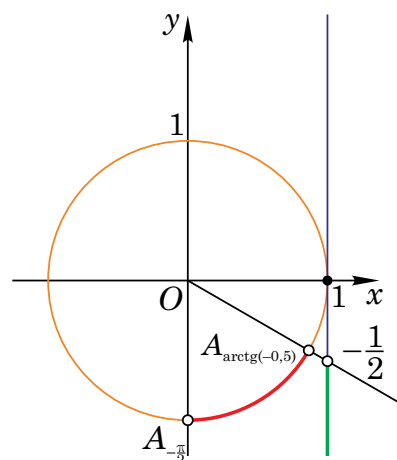
- 16.** Розв'яжіть нерівність  $\operatorname{tg} 5x < -\frac{1}{2}$ .

*Розв'язання.* Виконаємо побудову (див. рисунок).

$$-\frac{\pi}{2} + \pi n < 5x < \operatorname{arctg} \left( -\frac{1}{2} \right) + \pi n, n \in \mathbb{Z},$$

$$-\frac{\pi}{10} + \frac{\pi n}{5} < x < -\frac{1}{5} \operatorname{arctg} \frac{1}{2} + \frac{\pi n}{5}, n \in \mathbb{Z}.$$

*Відповідь.*  $-\frac{\pi}{10} + \frac{\pi n}{5} < x < -\frac{1}{5} \operatorname{arctg} \frac{1}{2} + \frac{\pi n}{5}, n \in \mathbb{Z}.$



**17.** Розв'яжіть нерівність  $\operatorname{ctg}\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \leq -\frac{1}{\sqrt{3}}$ .

*Розв'язання.* Виконаємо побудову (див. рисунок).

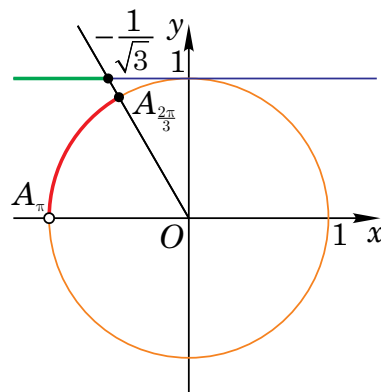
$$\frac{2\pi}{3} + \pi n \leq \frac{x}{2} - \frac{\pi}{4} < \pi + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z},$$

$$\frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{4} + \pi n \leq \frac{x}{2} < \pi + \frac{\pi}{4} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z},$$

$$\frac{11\pi}{12} + \pi n \leq \frac{x}{2} < \frac{5\pi}{4} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z},$$

$$\frac{11\pi}{6} + 2\pi n \leq x < \frac{5\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

*Відповідь.*  $\frac{11\pi}{6} + 2\pi n \leq x < \frac{5\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$



## VI. Числові послідовності. Границі числових послідовностей

### Арифметична прогресія

|                                |                                                                                                                                                                                                                                                                     |
|--------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Рекурентна формула             | $a_1 = a, a_{n+1} = a_n + d, n \in \mathbb{N}.$                                                                                                                                                                                                                     |
| Формула $n$ -го члена          | $a_n = a_1 + d(n-1), n \in \mathbb{N}.$<br>$a_n = a_k + d(n-k), n \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{N}, n > k.$                                                                                                                                                         |
| Формули суми $n$ перших членів | $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n, n \in \mathbb{N}.$<br>$S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n, n \in \mathbb{N}.$                                                                                                                                                |
| Властивості                    | $a_n = \frac{a_{n+1} + a_{n-1}}{2}, n \in \mathbb{N}, n > 1.$<br>$a_n = \frac{a_{n+k} + a_{n-k}}{2}, n \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{N}, n > k.$<br>$a_m + a_n = a_k + a_p, m \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{N}, p \in \mathbb{N}, m + n = k + p.$ |

### Геометрична прогресія

|                                |                                                                                                                                                                                                                                                                     |
|--------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Рекурентна формула             | $b_1 = b, b_{n+1} = b_n q, n \in \mathbb{N}.$                                                                                                                                                                                                                       |
| Формула $n$ -го члена          | $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}, n \in \mathbb{N}.$<br>$b_n = b_k \cdot q^{n-k}, n \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{N}, n > k.$                                                                                                                                               |
| Формула суми $n$ перших членів | $S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1}, n \in \mathbb{N}, q \neq 1.$                                                                                                                                                                                                     |
| Властивості                    | $b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}, n \in \mathbb{N}, n > 1.$<br>$b_n^2 = b_{n-k} \cdot b_{n+k}, n \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{N}, n > k.$<br>$b_m \cdot b_n = b_k \cdot b_p, m \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{N}, p \in \mathbb{N}, m + n = k + p.$ |

**Означення.** Послідовність, яка має границю, називають **збіжною**. Послідовність, яка не має границі, називають **розбіжною**.

**Границя суми.** Якщо послідовності  $a_n$  і  $b_n$  є збіжними, то послідовність  $(a_n + b_n)$  також є збіжною, причому  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ .

**Границя добутку.** Якщо послідовності  $a_n$  і  $b_n$  є збіжними, то послідовність  $(a_n b_n)$  також є збіжною, причому  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ .

**Наслідок.** Зауважимо, що  $\lim_{n \rightarrow \infty} (c a_n) = c \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ , де  $c$  — константа, а  $a_n$  — збіжна послідовність. Тобто константу можна виносити за знак границі.

**Границя частки.** Якщо послідовності  $a_n$  і  $b_n$  є збіжними, причому  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n \neq 0$ ,  $b_n \neq 0$ , то послідовність  $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$  також є збіжною і  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n}$ .

**Друга чудова границя:**  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$ .

### Ілюстративні приклади

- 18.** Сума  $n$  перших членів геометричної прогресії обчислюється за формулою  $S_n = 4(3^n - 1)$ . Знайдіть знаменник геометричної прогресії.

*Розв'язання.* Подамо  $b_{n+1} = S_{n+1} - S_n$ ,  $b_n = S_n - S_{n-1}$ .

$$\text{Тоді } q = \frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{S_{n+1} - S_n}{S_n - S_{n-1}} = \frac{4(3^{n+1} - 1) - 4(3^n - 1)}{4(3^n - 1) - 4(3^{n-1} - 1)} = \frac{8 \cdot 3^n}{\frac{8}{3} \cdot 3^n} = 3.$$

*Відповідь.* 3.

- 19.** Знайдіть суму всіх трицифрових чисел, кратних 9, які не більші за 1000.

*Розв'язання.* Маємо арифметичну прогресію, в якій  $a_1 = 108$  — найменше трицифрове число, яке ділиться на 9,  $a_n = 999$  — найбільше трицифрове число, яке кратне 9. Кількість членів прогресії знайдемо із рівності  $a_1 + (n-1)d = a_n$ ,  $108 + (n-1)9 = 999$ , звідси  $n = 100$ .

$$\text{Тоді } S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n = \frac{2 \cdot 108 + 9 \cdot 99}{2} \cdot 100 = 55350.$$

*Відповідь.* 55350.

- 20.** Знайдіть  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + n + 1}{3n^2 - 14n - 2}$ .

*Розв'язання.* Поділимо чисельник і знаменник дробу на  $n^2 \neq 0$ .

$$\text{Маємо: } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}{3 - \frac{14}{n} - \frac{2}{n^2}} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right)}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(3 - \frac{14}{n} - \frac{2}{n^2}\right)} = \frac{1 + 0 + 0}{3 - 0 - 0} = \frac{1}{3}.$$

*Відповідь.*  $\frac{1}{3}$ .

**21.** Знайдіть:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$ .

*Розв'язання.* За теоремою,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{(-1)}{n}\right)^n = e^{-1}$ .

*Відповідь.*  $e^{-1}$ .

**22\*.** Обчисліть  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n-5}{2n+1}\right)^{n-1}$ .

*Розв'язання.* При  $n \rightarrow \infty$  маємо невизначеність  $\|1^\infty\|$ . Перетворимо вираз:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n-5}{2n+1}\right)^{n-1} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n+1-6}{2n+1}\right)^{n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{-6}{2n+1}\right)^{n-1} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{2n+1}{-6}}\right)^{n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{2n+1}{-6}}\right)^{\frac{2n+1}{-6} \cdot \frac{-6}{2n+1} (n-1)} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{-6}{2n+1}\right)^{\frac{2n+1}{-6} (n-1)} = \\ &= e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-6n+6}{2n+1}} = \left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-6n+6}{2n+1} = -3 \right\} = e^{-3}. \end{aligned}$$

*Відповідь.*  $e^{-3}$ .



4. В арифметичній прогресії тридцять членів. Знайдіть суму всіх членів прогресії, якщо перший її член дорівнює  $-12$ , а останній становить  $75$ .

| А    | Б   | В    | Г   | Д    |
|------|-----|------|-----|------|
| 1305 | 945 | 2610 | 835 | 1890 |

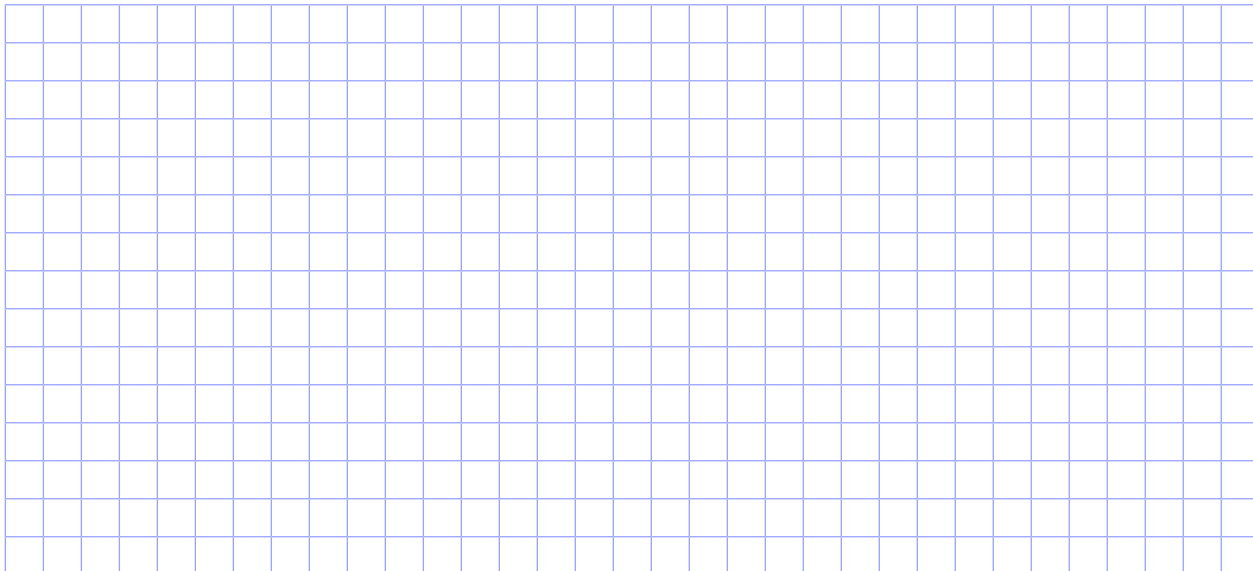
- 5.** Установіть відповідність між виразом (1–4) та виразом, який йому тотожно дорівнює (А–Д).

|                                                        |                                     |                                                                                                                                       |
|--------------------------------------------------------|-------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <i>Выраз</i>                                           | <i>Тот же самый выражение</i>       |                                                                                                                                       |
| <b>1</b> $\sin \alpha \cos \alpha$                     | <b>A</b> $\frac{1}{2} \sin 2\alpha$ | <b>1</b> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> |
| <b>2</b> $1 - 2 \sin^2 \alpha$                         | <b>B</b> $-\cos 2\alpha$            | <b>2</b> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> |
| <b>3</b> $\cos \left( \frac{\pi}{2} - 2\alpha \right)$ | <b>B</b> $\cos 2\alpha$             | <b>3</b> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> |
| <b>4</b> $\cos(\pi - 2\alpha)$                         | <b>Г</b> $2 \cos \alpha$            | <b>4</b> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> |
|                                                        | <b>Д</b> $\sin 2\alpha$             |                                                                                                                                       |

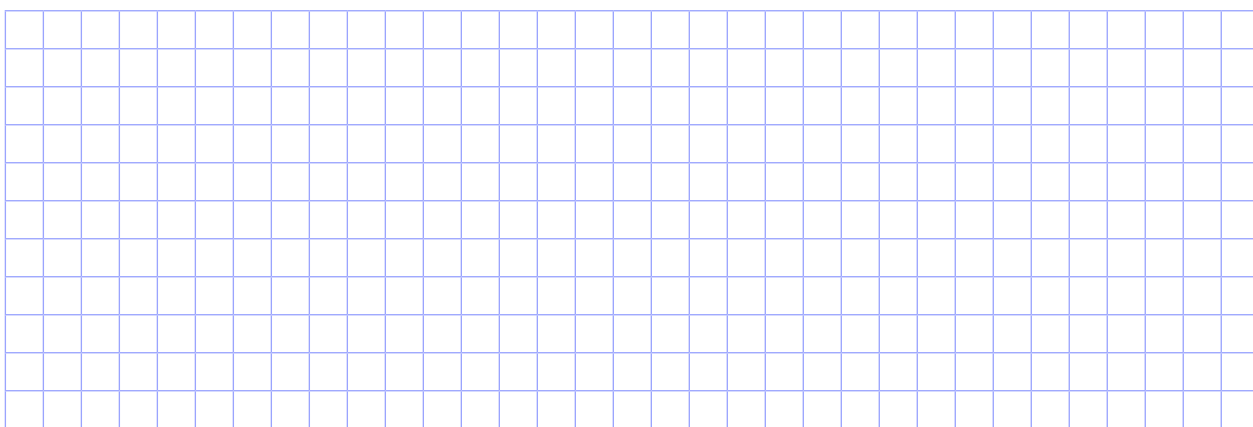
[illegible]

- 6.** Установіть відповідність між рівнянням (1–4) та множиною його розв’язків (А – Д) на проміжку  $[0; 2\pi]$ .

| <i>Рівняння</i>                               | <i>Множина розв'язків</i>                                                               | <i>А</i> | <i>Б</i>                 | <i>В</i>                 | <i>Г</i>                 | <i>Д</i>                 |
|-----------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------|----------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <b>1</b> $\sin 2x = 0$                        | <b>А</b> $\{0; 2\pi\}$                                                                  | <b>1</b> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| <b>2</b> $2 \cos x = 2$                       | <b>Б</b> $\left\{0; \frac{\pi}{2}; \pi; \frac{3\pi}{2}; 2\pi\right\}$                   | <b>2</b> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| <b>3</b> $\cos 2x = 0$                        | <b>В</b> $\left\{0; \frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{4}; \pi\right\}$          | <b>3</b> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| <b>4</b> $\operatorname{tg} \frac{1}{2}x = 1$ | <b>Г</b> $\left\{\frac{\pi}{2}\right\}$                                                 | <b>4</b> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|                                               | <b>Д</b> $\left\{\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}; \frac{7\pi}{4}\right\}$ |          |                          |                          |                          |                          |

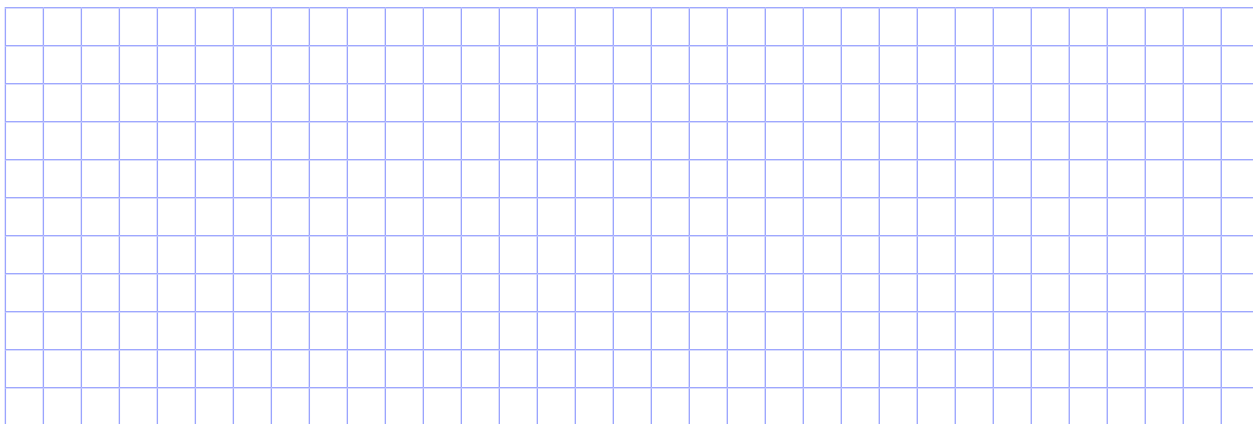


7. Обчисліть:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n + 3^n}{2^{n+1} + 3^{n+1}}$ .



*Відповідь.*

8. Знайдіть суму  $S$  усіх трицифрових натуральних чисел, які діляться на число 7 без остачі. У відповідь запишіть  $\frac{S}{100}$ .



*Відповідь.*

## Вариант 2

- 1.** Знайдіть значення виразу  $3\sin^2\alpha - 7\cos^2\alpha$ , якщо  $\cos\alpha = -0,1$ .

| А | Б   | В   | Г    | Д    |
|---|-----|-----|------|------|
| 2 | 2,9 | 3,1 | 3,96 | 2,92 |

[illegible]

- 2.** Розв'яжіть рівняння  $\sqrt{3} \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = 1$ .

**A**  $x = \pi n, n \in Z$

$$\text{B } x = \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in Z$$

$$\textbf{B} \quad x = -\frac{\pi}{3} + \pi n, n \in Z$$

$$\Gamma \quad x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Д } x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z$$

[illegible]

- 3.** Розв'яжіть нерівність  $2\sin 2x > \sqrt{2}$ .

$$\mathbf{A} \left( -\frac{\pi}{8} + \pi k; \frac{3\pi}{8} + \pi k \right), k \in \mathbb{Z}$$

$$\mathbf{B} \left( -\frac{\pi}{4} + \pi k; \frac{3\pi}{4} + \pi k \right), k \in Z$$

$$\mathbf{B} \left( -\frac{\pi}{4} + 2\pi k; \frac{3\pi}{4} + 2\pi k \right), k \in Z$$

$$\Gamma\left(-\frac{\pi}{8}+2\pi k; \frac{5\pi}{8}+2\pi k\right), k \in \mathbb{Z}$$

$$\mathbb{D}\left(-\frac{\pi}{8}+\pi k; \frac{5\pi}{8}+\pi k\right), k \in \mathbb{Z}$$

[illegible]

- 4.** Запишіть формулу для обчислення суми  $n$  перших членів геометричної прогресії  
2; 6; 18 ...

| А    | Б             | В        | Г         | Д         |
|------|---------------|----------|-----------|-----------|
| $2n$ | $3^{n+1} - 7$ | $3n - 1$ | $2^n + 1$ | $3^n - 1$ |

[illegible]

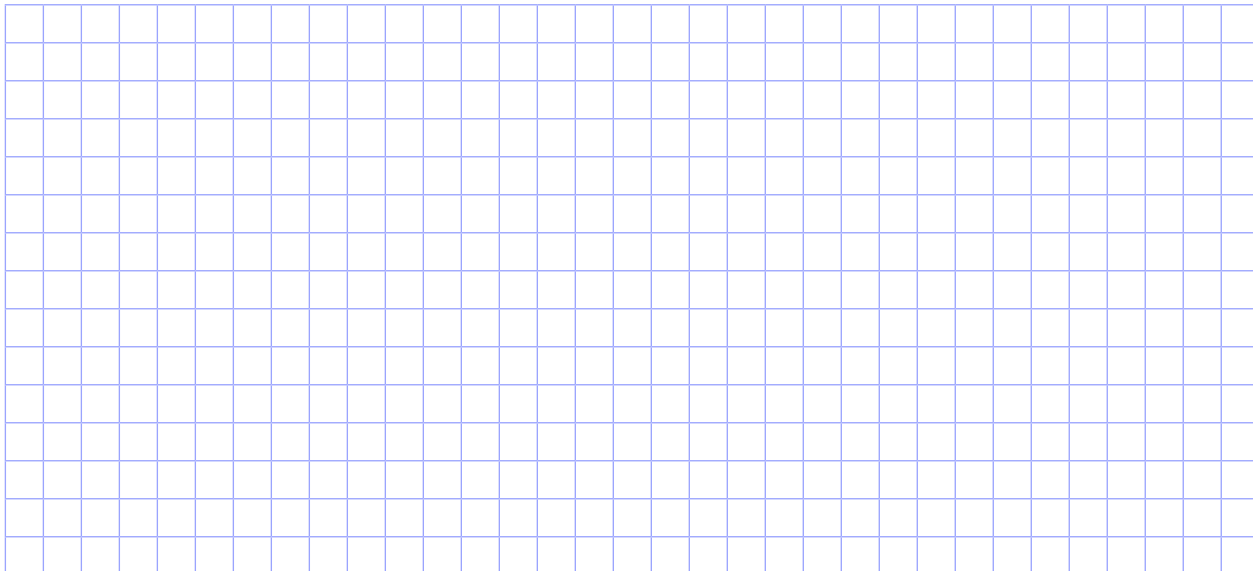
- 5.**  $\sin \beta = a$ , де  $\beta$  — кут I четверті. Установіть відповідність між тригонометричним виразом (1–4) та його значенням (А–Д).

| Тригонометричний вираз                      | Значення виразу   | А                        | Б                        | В                        | Г                        | Д                        |
|---------------------------------------------|-------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \beta\right)$  | А $a$             | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 2 $\sin(\pi - \beta)$                       | Б $-a$            | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 3 $\sin(\pi + \beta)$                       | В $\frac{1}{a}$   | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 4 $\sin\left(\frac{3\pi}{2} - \beta\right)$ | Г $-\sqrt{1-a^2}$ | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|                                             | Д $\sqrt{1-a^2}$  | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

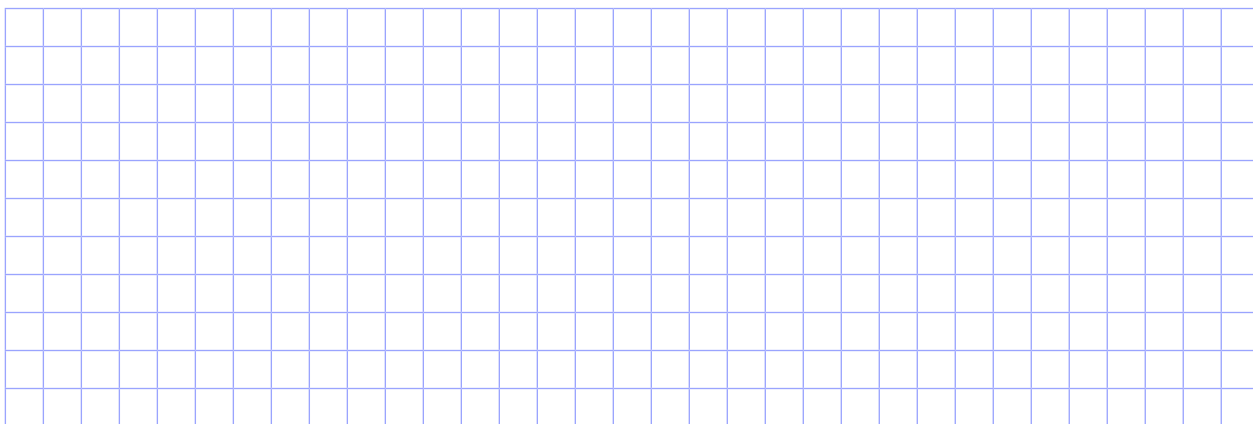
A full-page view of a blank sheet of graph paper. The grid consists of small, uniform squares formed by thin, light blue horizontal and vertical lines. There are no margins, text, or other markings on the page.

- 6.** Установіть відповідність між рівнянням (1–4) та множиною його розв’язків (А–Д).

| Рівняння |                                                      | Множина розв'язків рівняння |                                                           | А                        | Б                        | В                        | Г                        | Д                        |
|----------|------------------------------------------------------|-----------------------------|-----------------------------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1        | $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = a,  a  \leq 1$ | А                           | $\pm \arccos a + 2\pi n, n \in Z$                         | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 2        | $\sin x \cos x = \frac{a}{2}$                        | Б                           | $\arctg a + \pi n, n \in Z$                               | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 3        | $\sin x = a \cos x$                                  | В                           | $\arccotg a + \pi n, n \in Z$                             | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 4        | $\tg\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = a$             | Г                           | $(-1)^n \arcsin a + \pi n, n \in Z$                       | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|          |                                                      | Д                           | $(-1)^n \frac{1}{2} \arcsin a + \frac{\pi n}{2}, n \in Z$ | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |



7. Обчисліть:  $\lim_{n \rightarrow \infty} (n - \sqrt{n^2 + 4n})$ .



*Відповідь.*

8. Знайдіть найбільше значення  $x$ , за яких числа  $x - 1$ ,  $2x - 1$  і  $x^2 - 5$ , записані в указаному порядку, утворюють арифметичну прогресію.



*Відповідь.*

## Відповіді до тестових завдань

### Варіант 1

1. В.
2. Б.
3. Д.
4. Б.
5. 1 – А, 2 – В, 3 – Д, 4 – Б.
6. 1 – Б, 2 – А, 3 – Д, 4 – Г.
7.  $\frac{1}{3}$ .
8. 703,36.

### Варіант 2

1. Б.
2. А.
3. Д.
4. Д.
5. 1 – Д, 2 – А, 3 – Б, 4 – Г.
6. 1 – А, 2 – Д, 3 – Б, 4 – В.
7. –2.
8. 4.

### Таблиця оцінювання

| № завдання | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 7 | Сума |
|------------|---|---|---|---|---|---|---|---|------|
| Бали       | 1 | 1 | 1 | 1 | 4 | 4 | 2 | 2 | 16   |

### Критерії оцінювання

1) Коефіцієнт оцінювання:  $\frac{12}{16} = 0,75$ .

2) Коефіцієнт оцінювання 0,75 множимо на кількість набраних балів і отримаємо оцінку.

Наприклад, учень/учениця набрав/набрала 24 тестових бали за результатами тестування.

Тоді, оцінка:  $12 \cdot 0,75 = 9$  (балів).

### Рефлексія (1–2 хв)

Сьогодні я повторив/повторила .....

.....

.....

Найважливішим для мене було .....

.....

.....

Тепер я вмію .....

.....

.....

Найскладнішим для мене було .....

.....

.....

Мені ще потрібно попрацювати над . . . . .  
.  
.